

部材グループを考慮したラチスシェルの 部材長一様化のための形状最適化

○大崎 純^{*1} 藤田慎之輔^{*2}

キーワード：最適化 ラチスシェル パラメトリック曲面

1. 序

ラチスシェルの形状最適化については多くの研究が存在するが、最適化の結果得られた構造は、極めて多くの種類の部材や接合部を持つため、実際に施工する際に多くのコストを必要とする。そのため、部材長の一様化を考慮した最適化が検討されている。小河ら[1]は、数種類の近い長さの部材で構成されるラチスシェルを得ているが、完全な部材長一様化は行っていない。

著者らは、三角形、四角形、六角形グリッドのラチスシェルを対象として、部材長の一様化を試みた[2]。とくに、三角形グリッドシェルの部材長を完全に一様化すると、部材の間の角度が 60 度になることから接合部の種類数の低減も期待できるなど、メリットが多い反面、シェルの形状が筒状に限定されるため、デザインの自由度が制限される。

本研究では、まず、対称性を有する三角形グリッドラチスシェルに対して、ひずみエネルギー最小化と部材長一様化を目的とし、部材のグループ化を取り入れた結果を考察する。また、非対称な四角形グリッドのラチスシェルを対象として、部材長一様化のみを目的として、グループ化の効果について検討する。

2. 三角形グリッドのひずみエネルギー最小化と部材長一様化のための最適化問題

2.1 最適化問題

構造物の剛性の向上を目的とした古典的な構造最適化問題で目的関数とされるひずみエネルギーを最小化する。さらに、施工性を考慮して、ラチスシェルの部材長の平均値からの差の 2 乗和（分散）

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m (L_k - L_{ave})^2 \quad (1)$$

を部材長一様化の指標として考慮する。ここで、 $\mathbf{x}$ 、 m 、 L_k 、 L_{ave} はそれぞれ形状を定める設計変数ベクトル、部材数、第 k 部材の部材長、平均部材長である。

剛性行列を $\mathbf{K}$ 、自重などの指定荷重に対する静的変位ベクトルを $\mathbf{d}$ とする。また、総部材長を L 、総部材長の上限値を $\bar{L}$ として、次のようなひずみエネルギー最小化問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{Minimize } f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to } L(\mathbf{x}) - \bar{L} &\leq 0 \\ g(\mathbf{x}) &= \bar{g} \end{aligned} \quad (2a-c)$$

ここで、 $\bar{g}$ は部材長の分散の指定値であり、微小な値を与えることにより、部材長を一様化できる。

2.2 ラチスシェルモデル

図 1 のような三角形グリッドを有する直径 45 m、ライズ 10.2 m の球形ラチスシェルを考える。部材断面は外径 165.2 mm、厚さ 4.5 mm の円形鋼管とし、ヤング係数を 210 GPa、重量密度を 77 kN/m³ とする。節点は剛接合し、外力として自重を作用させる。

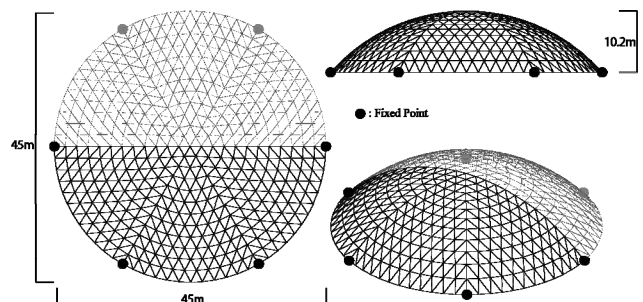


図 1： 三角形グリッド球形ラチスシェル

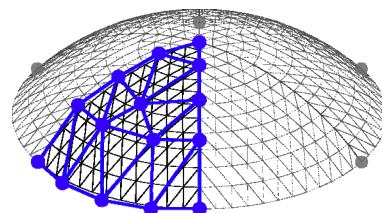


図 2： 三角形パッチベジエ曲面の制御ネット

弾性静的解析での境界条件は、図 1 に示す黒丸の 6 点を固定支持とし、対称性を考慮して全体の 1/2 の領域のみ解析する。図 2 に示すように、4 次の三角形パッチベジエ曲面[3]で形状を定義する。全体の 1/6 の領域の節点座標をベジエ曲面で定義し、残りの節点は対称性により生成する。

したがって、1/6 の領域の境界で曲面の勾配は不連続である。最適化の際には、制御点の xyz 座標を変数とする。また、総部材長の上限值 $\bar{L}$ は、図 1 の球形シェルでの値とする。さらに、 $\bar{g}=0.0001 \text{ m}^2$ として、部材長がほぼ一様な解を求める。最適化には逐次 2 次計画法のプログラム SNOPT を用いる。

2.3 部材をグループ化しない場合

制御点の z 座標のみを変数としたときの最適形状を初期解として、制御点 xyz 座標最適化した結果を図 3 に示す。

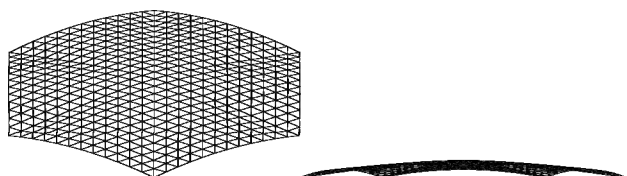


図 3： 部材グループを考慮しない場合の最適解

最適解での諸量を表 1 の「1 グループ」の列に示す。ここで、 $d_{\max}$ は最大変位である。また、部材長の最大値 $L_{\max}$ は 1890.4 mm，最小値 $L_{\min}$ は 1887.8 mm である。最大値と最小値の差は 2.6 mm であり、部材長はほぼ一様化された。しかし、図 3 から分かるように、部材長を一様化するためには、ライズを小さくする必要がある。また、初期解での f は 0.329 kNm， $d_{\max}$ は 3.93 であり、最適化によって著しく剛性が低下した。

表 1： 最適解での諸量

	1 グループ	5 グループ	10 グループ
$f(\text{kNm})$	1.075	0.565	0.260
$d_{\max}(\text{mm})$	14.92	7.71	3.67
$L(\text{m})$	1280.7	1291.8	1326.8
$g(\text{m})$	0.0	0.0	0.0

2.4 部材をグループ化する場合

図 4 のように部材をグループ化し、それぞれのグループの中で部材長を一様化する問題を考える。

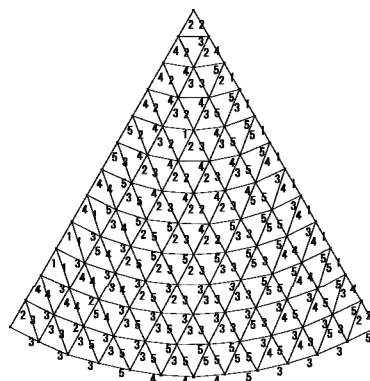
式(1)の $g(\mathbf{x})$ は

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{m_i} (L_k^i - L_{\text{ave}}^i)^2 \quad (4)$$

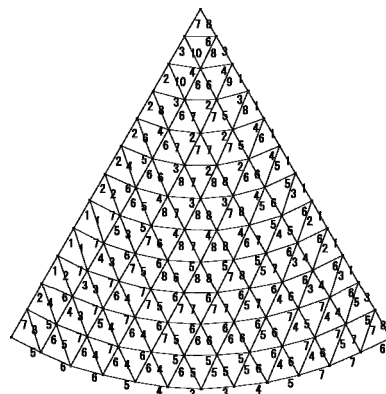
のようになる。ここで、 s はグループ数、 m_i はグループ i の部材数、 L_k^i はグループ i の第 k 部材の長さである。

グループ数が 5 のときの最適化結果を図 5 および表 2 に示す。グループ化を考慮しないとき（グループ数が 1 のとき）と比べてライズは大きくなり、かつ部材長がほぼ一様な形状を生成することができた。部材長の差の最大値は

2.5 mm であり、施工時に接合部で十分に処理できる小さい値である。最適解での諸量を表 1 の「5 グループ」の列に示す。ひずみエネルギーは球形シェルの 1.86 倍となっている。



(a) グループ数 5



(b) グループ数 10

図 4： 部材のグループ番号

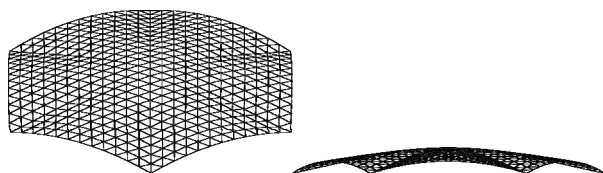


図 5： グループ数 5 のときの最適解

表 2： グループ数 5 のときの最適化結果 (mm)

グループ	$L_{\max}$	$L_{\min}$	$L_{\max} - L_{\min}$
1	1904.0	1902.4	1.5
2	1907.6	1905.7	1.9
3	1906.6	1904.7	1.9
4	1905.4	1902.9	2.5
5	1906.1	1903.8	2.3

グループ数が 10 のときの最適化結果を図 6 および表 3 に示す。グループ数が 5 のときと比べてライズはさらに大きくなっている。部材長の差の最大値は 2.1 mm である。

最適解での諸量を表 1 の「10 グループ」の列に示す。ひずみエネルギーは球形シェルの 0.79 倍となっている。

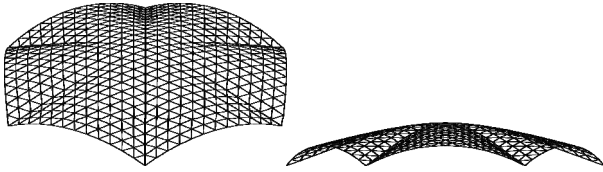


図 6： グループ数 10 のときの最適解

表 3： グループ数 10 のときの最適化結果 (mm)

グループ	$L_{\max}$	$L_{\min}$	$L_{\max} - L_{\min}$
1	1951.5	1949.4	2.1
2	1953.2	1951.8	1.4
3	1954.3	1953.0	1.3
4	1955.8	1954.5	1.4
5	1957.4	1955.8	1.6
6	1958.7	1957.2	1.5
7	1960.1	1958.7	1.4
8	1961.4	1959.9	1.5
9	1961.8	1961.6	0.2
10	1963.0	1962.6	0.3

3. 四辺形グリッドの部材長一様化

3.1 四辺形グリッドモデル

グループ化の効果を確認するため、四辺形グリッドを有するラチスシェルの形状を最適化する。ここで、ひずみエネルギーは考慮せず、部材長の一様化のみを目的とする。

曲面を 5×5 次のテンソル積ベジエ曲面で表現する。また、部材のグリッドは 20×20 である。問題を複雑にしてグループ化の効果を検討するため、対称性を崩して非対称平面を考える。

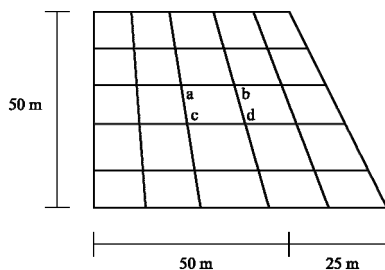


図 7： 制御多角形の平面図

ラチスシェルの平面形を、制御ネットの平面図とともに図 7 に示す。最適化の結果平面に近い形状が得られることを防ぐため、図の制御点 a, b, c, d の高さを 50 m に固定する。また、外周の制御点は平面上にあり、辺方向のみに移動可能とする。初期形状を図 8 に示す。

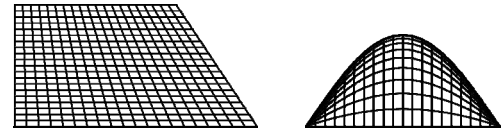
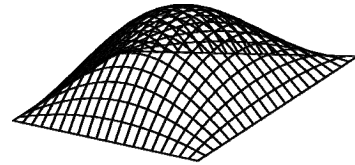


図 8： 四辺形グリッドシェルの初期形状

制御頂点座標に加えて、節点位置を定めるパラメータも変数とする。ただし、全ての節点のパラメータ値を変数とすると、収束性が悪く非現実的なグリッドとなるので、パラメータ値も 5×5 次のベジエ関数でパラメトリックに定義する。以上より、形状決定のための変数の総数は 108、部材数は 840 である。

3.2 部材長の分散を最小化した場合

グループ化しないで部材長の分散を最小化するための以下のような問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{Minimize } g(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{m_i} (L_k^i - L_{\text{ave}}^i)^2 \\ \text{subject to } L(\mathbf{x}) - \bar{L} &\leq 0 \end{aligned} \quad (5a-c)$$

最適化の結果、部材長の最大値と最小値の差は 2.650 m となった。次に、クラスタリングの基本的な方法である K-means 法によって、5 つのグループに分けて最適化した。

さらに、その結果から 5 つのグループに再度分割して最適化すると、各グループ内での部材長の差の最大値は 0.533 m である。この操作を繰り返して、20 個のグループに分けると、各グループ内での部材長の差の最大値は 0.217 m となった。

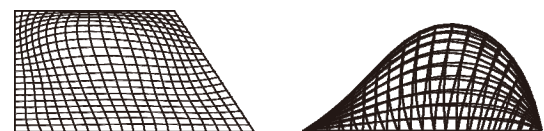
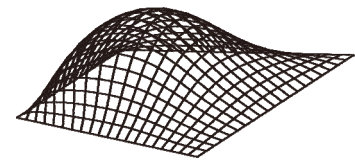


図 9： 分散最小化による最適解（グループ数 20）

グループ数 20 のときの最適解を図 9 に示す。また、最適化の結果を表 4 にまとめる。この例は、部材数が多く、非対称なので、部材長を完全に一様化することは困難である。全ての最適解で、総部材長の制約は、アクティブにならない。

ところで、グループ化を考慮しない解の部材長を、等間隔に 20 分割して 20 個のグループに分けると、部材長の差の最大値は 1/20 以下になる。しかし、表 4 の結果は、1/20 より大きい値となっている。したがって、分散最小化問題と K-means 法によるクラスタリングでは、部材長の差を十分に小さくできない。

表 4： 分散最小化による最適化結果

グループ数	目的関数 (mm ²)	最大 (mm)	最小 (mm)	グループ内での差 (mm)
1	309.3	4598	1948	2650
5	12.5	4558	2420	533
10	3.1	4548	2434	264
20	0.9	4545	2494	217

3.3 最大値と最小値の差の最小化

次に、グループごとの部材長の最大値と最小値の差を最小化するための次のような問題を考える。

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } D \\ &\text{subject to } D_k^U - D_k^L \leq D, \quad (k=1, \dots, s) \end{aligned}$$

$$D_k^L \leq L_k^i \leq D_k^U, \quad (i=1, \dots, m_i; k=1, \dots, s) \quad (6a-c)$$

ここで、 D_k^U と D_k^L はグループ k の部材長の最大値と最小値、 D は全グループでの差の最大値であり、これらは変数である。また、総部材長の制約は、分散最小化の際にもアクティブにならなかったと与えない。

グループ化のために K-means 法を用いると、必ずしも $D_k^U - D_k^L$ が最小となるようにグループ化できないので、現在のグループ数での最適解の部材長を、等間隔に分割してグループ化する。また、各グループでの繰返し最適化は行わない。

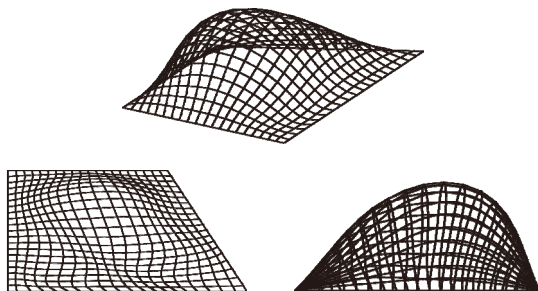


図 10： 部材長差の最小化による最適解（グループ数 20）

最適化の結果を図 10 及び表 5 に示す。図 9, 10 より、部材長の分散最小化と差の最小化では、異なった形状が得られることが分かる。また、グループ内での部材長差の最大値は、グループ数を 20 とすることによって、グループ化しないときの 1/20 より小さい値となっていることが確認できる。

表 5： 部材長の差の最小化による最適化結果 (mm)

グループ数	目的関数 (グループ内での最大値)	最大	最小
1	1855	4354	2488
5	355	4361	2494
10	175	4365	2493
20	83	4365	2491

5. 結論

本研究で得られた成果は以下のとおりである。

1. ひずみエネルギー最小化問題において、部材長の分散を微小な値に指定することによって、部材の種類を限定して、かつ力学的にも優れた形態を見出すことができる。
2. 三角形ベジエパッチの制御点座標を変数として部材長を一樣化すると、部材をグループ化しない場合、平面に近い形状が得られるが、グループ化することにより、ライズをもった現実的な形状が得られる。
3. 節点座標を定めるパラメータも変数とすると、非対称な四辺形グリッドでも、グループ化することによって部材長の差を低減できる。また、部材長の分散ではなく、差を目的関数とすると、制約条件が多くなるが、部材長差を小さくできる。
4. クラスタリングの基本的な方法である K-means 法は、部材長の分散が最小になるようにグループ化するため、部材長の差を最小化するためには必ずしも有効ではない。

【参考文献】

- 1) 小河利行, 大崎 純, 立石理恵: 線形座屈荷重最大化と部材長一樣化を目的とした単層ラチスシェルの形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, No. 579, pp. 129-136, 2003.
- 2) 藤田慎之輔, 大崎 純: ラチスシェルの部材長一樣化制約下でのひずみエネルギー最小化, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸) 構造 I, 2010.
- 3) 藤田慎之輔, 大崎 純: 三角形パッチベジエ曲面による区分的可展シェルの形態創生, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東北) 構造 I, pp.831-832, 2009.
- 4) M. Ohsaki, T. Ogawa, and R. Tateishi: Shape optimization of curves and surfaces considering fairness metrics and elastic stiffness, Struct Multidisc Optim, No.27, 250-258, 2004

*1 広島大学大学院工学研究科 教授 博士 (工学)

*2 金箱構造設計事務所 (広島大学大学院工学研究科 社会人博士課程)