

# 弾塑性時刻歴応答制約下の設計問題に対して部分的感度情報により 拡張された直接探索法

○清水 亜久里\*<sup>1</sup> 山川 誠\*<sup>2</sup>  
大崎 純\*<sup>3</sup>

キーワード：時刻歴応答解析 構造最適化 設計感度 直接探索

## 1. はじめに

断層近傍・長周期地震動といった建築基準法のレベルを大きく上回る極大地震が構造物の挙動に及ぼす危険性が指摘<sup>1)</sup>される一方で、建築構造の高機能化・多機能化により設計上の自由度は拡大しており、これまで以上に高度な工学的判断が要請されるようになっている。このような要請に応える合理的な数理的設計法の確立、および問題構造の明確化は意義あるものと言える。

建築構造の耐震設計においては地震時応答が設計条件として与えられる<sup>2)</sup>。実務設計との整合性を考えた場合に弾塑性時刻歴応答を制約条件に含むような最適化問題へと耐震設計上の設計問題定を式化することは自然である。ここで、弾塑性時刻歴応答は以下の特徴を持つ。

- (1) 継続時間中の最大応答値を対象とする場合、設計パラメータの変化に対する最大応答値の感度係数は不連続となる。
- (2) 弾塑性等の材料非線形性をBi-linear型のような折れ線状に与えた場合、設計パラメータの変化に対する応答値の感度係数は不連続となる。

すなわち、弾塑性時刻歴応答を設計条件として含む関数は連続微分不可能な非平滑関数である<sup>3)</sup>。よって、設計感度に基づく標準的な非線形計画法は一次の最適性条件（必要条件）を満たす点への大域的収束性を保証していない。以上より、時刻歴応答を考慮した設計問題は標準的な非線形計画法の適用が難しい問題として知られる。さらに建築構造の耐震設計への適用を考えた場合には、以下の要件が加えられる。

- (3) 入力波形に含まれる雑音成分や周波数成分の偏りが関数値および設計感度に影響を与えるため、その応答値は局所的にも非凸性・非単調性の強い関数となる。このような雑音性・非平滑性を示す関数を含む最適化問題に対してもDerivative-Freeな方法の一つである直接探索法が適用可能である<sup>4)</sup>。直接探索法は古典的な最適化法であるが、感度情報を用いない最適化法としての現代的な再解釈がなされている。直接探索法は感度解析における諸問題の影響を受けない方法であり、さらに応答の非線形性が強く、雑音成分も含まれるような条件の良くない問題に対しても良い解が求められることが報告されて

いる<sup>5)</sup>。さらにある種の条件を満たせば、非平滑な関数を含む最適化問題に対しても最適性条件（一次の必要条件）を満たす点への大域的な収束性が保証される<sup>4)5)</sup>。

耐震設計への適用を考えた場合には、雑音性を持つ非平滑な設計条件とともに連続微分可能な扱い易い設計条件も同時に含んでいることが一般的と考えられる。感度情報を利用可能な制約条件については感度情報を用いることが合理的である。以上のような背景のもとで、本報では、連続微分不可能な関数と可能な関数が混在する問題に対して、大域的収束性が保証され、かつ良好な探索結果を示す方法を提案する。

## 2. 直接探索法

### 2.1 対象問題

本節では、対象とする最適化問題を定式化する。実数変数ベクトル  $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$  について、連続微分可能な関数  $f_0(\mathbf{x})$  を目的関数とする。また、局所Lipschitz連続<sup>6)</sup>な関数  $g_i(\mathbf{x})$  ( $i=1, \dots, I$ ) を制約関数とする。ここで、連続微分可能な関数を  $g_i(\mathbf{x})$  ( $i=1, \dots, J$ )、連続微分不可能な関数を  $g_i(\mathbf{x})$  ( $i=J+1, \dots, I$ ) と分類し、 $1 \leq J \leq I$  とする。このとき、最適化問題

$$\left. \begin{array}{l} \underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i=1, \dots, J, J+1, \dots, I) \end{array} \right\} (1)$$

を定義する。後に  $g_i(\mathbf{x})$  ( $i=J+1, \dots, I$ ) に弾塑性時刻歴応答解析についての制約関数を、 $g_i(\mathbf{x})$  ( $i=1, \dots, J$ ) にその他の制約関数を対応させる。さらに、パラメータ  $\mu > 0$  を用いて問題(1)を

$$\left. \begin{array}{l} \underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad f(\mathbf{x}) := f_0(\mathbf{x}) + \mu \sum_{i=J+1}^I \max\{0, g_i(\mathbf{x})\} \\ \text{subject to} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (i=1, \dots, J) \end{array} \right\} (2)$$

と書き換える。このような定式化は正確なペナルティ関数法として知られており、 $\mu > 0$  を十分大きく与えれば問題(1)と問題(2)の解は一致する。以降では、簡潔な表記のために、問題(2)を扱い、その実行可能集合を次式で表す。

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0; i=1, \dots, J\} \quad (3)$$

## 2.2 直接探索法

直接探索法 (Directional Direct Search Method, 以下 DSM と記す) の基本的なアルゴリズムを図1に示す。Algorithm 1において、 $\rho(\mathbf{x}^k, \Delta_k)$  は forcing function と呼ばれ、Algorithm 1の収束性を保証することができる<sup>7)</sup>。ここでは  $\rho(\mathbf{x}^k, \Delta_k) = \alpha \max\{1, f(\mathbf{x}^k)\}(\Delta_k)^2$  と与える。

**Initialization**  
 許容な初期解  $\mathbf{x}^0 \in \Omega$  を選び、パラメータ  $0 < \Delta_0 \leq \Delta_{\max}$ ,  $0 < \beta_1 < 1 \leq \beta_2$  を与える。  
 For  $k = 0, 1, 2, \dots$

**Search step:**  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^k) - \rho(\mathbf{x}^k, \Delta_k)$  を満たす  $\mathbf{x} \in \Omega$  を探索する。もしそのような  $\mathbf{x}$  が見つければ  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}$  と与え、第  $k$  回目の繰り返しは「成功」と宣言する。

**Poll step:** 探索方向集合  $D_k \subset \mathbb{R}^n$  を選び、探索点集合  $P_k = \{\mathbf{x}^k + \Delta_k \mathbf{p} \mid \mathbf{p} \in D_k\} \cap \Omega$  に含まれる点で関数  $f$  を評価する。 $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^k) - \rho(\mathbf{x}^k, \Delta_k)$  を満たす探索点  $\mathbf{x} \in P_k$  が見つければ、 $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}$  と与え、第  $k$  回目の繰り返しは「成功」と宣言する。そのような探索点が見つからなければ、 $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k$  と与える。

**Step size parameter update:** もし「成功」と宣言されていればステップサイズを  $\Delta_{k+1} = \min\{\Delta_{\max}, \beta_2 \Delta_k\}$  と拡大させ、「成功」と宣言されていなければ  $\Delta_{k+1} = \beta_1 \Delta_k$  と縮小させる。

図1 Algorithm 1

最適性条件を満たす点への収束性と Algorithm 1 を結びつけることができるような探索方向集合  $D_k$  の生成法<sup>5)</sup> を以降に述べる。(3)に定義された実行可能集合  $\Omega$  に対して、 $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  における  $\varepsilon$ -線形化錐を

$$C_\Omega(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(\mathbf{x})^T \mathbf{d} \leq 0, i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}; \varepsilon)\} \quad (4)$$

と定義する。ここで、

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{i \in \{1, \dots, I\} \mid g_i(\mathbf{x}) / \|\nabla g_i(\mathbf{x})\| \geq -\varepsilon\} \quad (5)$$

は正規化された  $\varepsilon$ -有効制約の添字集合とする。 $\varepsilon$ -有効制約とはその点から距離  $\varepsilon$  以内で有効となる制約条件の集合である。異なる二つの  $\varepsilon$  を与えた場合の  $\varepsilon$ -線形化錐の例を図2に示す。

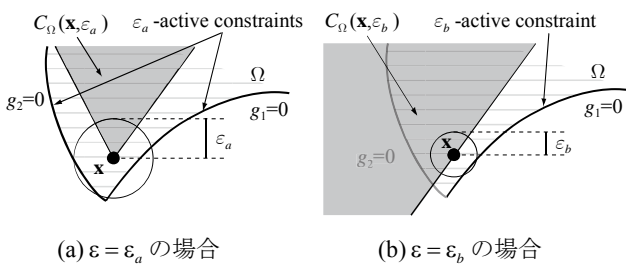


図2  $\varepsilon$ -線形化錐の例

図2において灰色の線で塗られた領域が集合  $\Omega$  を、灰色に塗られた領域が与えられた  $\varepsilon$  に対応する  $\varepsilon$ -線形化錐をそれぞれ表している。 $\varepsilon$ -線形化錐とは距離  $\varepsilon$  内で集合  $\Omega$  を局所的に線形近似するものである。このとき、Algorithm 1により生成される  $\{\mathbf{x}^k\}, \{\Delta_k\}$  の  $\varepsilon$ -線形化錐  $C_\Omega(\mathbf{x}^k, \Delta_k)$  を考える。錐の生成元を求める方法は計算幾何学の分野で良く研究されており、そのような方法<sup>8)</sup> により  $\varepsilon$ -線形化錐を

$$C_\Omega(\mathbf{x}^k, \Delta_k) = \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{d} = \sum_{i=1}^{n_r} u_i \mathbf{t}_i \text{ for } u_i \geq 0 \right\} \quad (6)$$

と特定できる。ここで、 $\mathbf{t}_i$  ( $i=1, \dots, n_r$ ) は錐  $C_\Omega(\mathbf{x}^k, \Delta_k)$  の生成元、 $n_r$  は生成元の数とする。区間  $[0, 1]$  上の一様分布  $U[0, 1]$  に従いランダム発生させた係数  $r_i \sim U[0, 1]$  ( $i=1, \dots, n_r$ ) を  $\mathbf{t}_i$  に乗じて和をとることにより、錐  $C_\Omega(\mathbf{x}^k, \Delta_k)$  内のランダム方向ベクトル

$$\sum_{i=1}^{n_r} r_i \mathbf{t}_i \in C_\Omega(\mathbf{x}^k, \Delta_k) \quad (7)$$

をいくつか生成させ、これらを探索方向集合  $D_k$  とする。このような方法により非平滑問題の最適性条件<sup>4)5)</sup> を満たすことができる<sup>9)</sup>。錐  $C_\Omega(\mathbf{x}_k, \Delta_k)$  の生成元とランダム探索方向集合の例を図3に示す。図3でも灰色の線で塗られた領域が集合  $\Omega$  を、灰色に塗られた領域が錐  $C_\Omega(\mathbf{x}_k, \Delta_k)$  をそれぞれ表している。また、 $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$  は錐の生成元を表しており、この場合  $n_r = 3$  である。これら  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$  の非負線形結合により錐内の点を表現できる。制約関数の感度情報を用いて実行可能領域を局所的に近似すれば有効な探索方向を効率的に生成できることがわかる。このような方法により最適性条件を満たす点へ確率1で収束することが保証される<sup>5)</sup>。

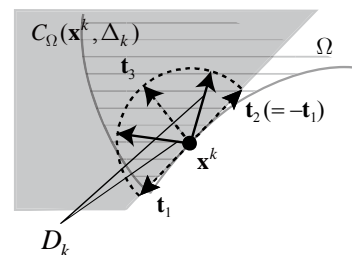


図3 錐内での方向ベクトルのランダム生成

## 3. 数値解析例

### 3.1 問題設定

図4に示す4層1スパンの鋼構造平面モデルを考える<sup>9)</sup>。部材数は16であり、梁部材にはH型鋼、柱部材には角形鋼管の使用を想定する。断面符号G1からG4を梁部材断面、断面符号C1からC4を柱部材断面として、図4に示すように与える。

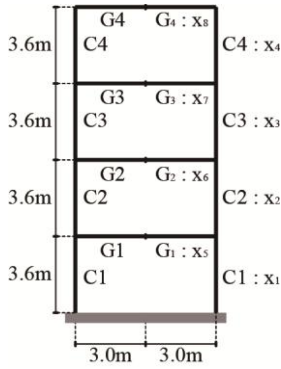


図4 4層1スパン鋼構造平面骨組モデル

$n=8$  と与え、設計変数  $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_8)$  と断面符号を図4のように関係づける.  $x_i$  は第  $i$  部材断面の断面積に対応する変数とし、吉富らによって提案された規格材の断面形状についての回帰式<sup>10)</sup>に基づき、次式のように与える.

【柱部材断面 ( $i=1,2,\dots,4$ )】

$$\left. \begin{aligned} B_i &= H_i = 2.00\sqrt{x_i} + 15.1 \\ t_i &= (B_i - \sqrt{B_i^2 - x_i}) / 2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

【梁部材断面 ( $i=5,6,\dots,7$ )】

$$\left. \begin{aligned} H_i &= 3.79\sqrt{x_i} - 3.96 \quad (x_i \leq 133.2\text{cm}^2) \\ H_i &= 10.3\sqrt{x_i} - 78.8 \quad (133.2\text{cm}^2 < x_i \leq 266.9\text{cm}^2) \\ H_i &= 0.818\sqrt{x_i} + 75.7 \quad (266.9\text{cm}^2 < x_i) \\ B_i &= 2.98\sqrt{x_i} - 4.64 \quad (x_i \leq 133.2\text{cm}^2) \\ B_i &= 0.0314\sqrt{x_i} + 29.5 \quad (133.2\text{cm}^2 < x_i) \\ t_{fi} &= 0.0074x_i + 0.6398 \\ t_{wi} &= B_i - (H_i B_i - x_i) / (H_i - 2t_{fi}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、第  $i$  柱部材断面については  $D_i$  をせい、 $t_i$  を板厚、第  $i$  梁部材断面については  $B_i$  を幅、 $H_i$  をせい、 $t_{wi}$  をウェブ厚、 $t_{fi}$  をフランジ厚とする. 設計変数の上下限値を

$$\left. \begin{aligned} 150\text{cm}^2 &\leq x_i \leq 1100\text{cm}^2 \quad (i=1,2,\dots,4) \\ 30\text{cm}^2 &\leq x_i \leq 400\text{cm}^2 \quad (i=5,6,\dots,8) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

と与える. 問題(1)の表記に対応する目的関数として、鋼構造建物のコスト関数

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^8 c_i \rho_i A_i \quad (11)$$

を与える. ここで、 $\rho = 7.8\text{g/cm}^3$  は鋼材密度、 $c_i = 25 \times 10^{-6}/\text{g}$  はコスト係数、 $A_i = A(x_i)$  は第  $i$  部材の断面積とする.

弾塑性時刻歴応答の最大値についての制約条件を課す. 各梁要素は図4のように2要素に分割する. 床重量  $8.0\text{kN/m}$ , 直行スパン  $6\text{m}$  と設定する. これらから梁中央節点に  $14.7 \times 10^3\text{kg}$ , 梁端部節点に  $7.35 \times 10^3\text{kg}$  の節点質量を与える. また、剛床仮定が成り立つとする. 第  $i$  入力地震動の地動加速度を  $\mathbf{g}_0^{(i)}$  と表す. 最大速度振幅が

$50\text{cm/s}$  となるように基準化された観測記録地震動<sup>1)</sup>として El Centro 1940 NS および Taft 1952 EW, さらに日本建築センターから公開されている模擬地震動である BCI-L2<sup>12)</sup> の計三波を設計入力地震動として与える. 第  $i$  地震動に対する第  $j$  層の時刻  $t$  における設計  $\mathbf{x}$  の層間変形を  $d_j(\mathbf{x}, t; \mathbf{g}_0^{(i)})$  と表す. このとき、条件

$$\max_{t>0} |d_j(\mathbf{x}, t; \mathbf{g}_0^{(i)})| / h_j \leq \frac{1}{100} \quad (i=1,2,3, j=1,2,3,4) \quad (12)$$

を与える. 骨組モデルの解析ソフトである OpenSees<sup>13)</sup> を応答評価に用いる. 鋼構造の応力-ひずみ関係は Normal bi-linear 型とし、弾性係数を  $E = 205\text{kN/mm}^2$ , 鋼材降伏応力を  $\sigma_y = 235\text{N/mm}^2$ , 移動硬化の硬化係数を  $0.01$  とする.

柱要素および梁要素はファイバーモデルとする. ここでは、平面フレーム解析を行うので、ファイバー要素分割は、梁要素のフランジの厚さ方向、柱要素の上下辺の厚さ方向にのみそれぞれ4分割、梁要素のウェブの深さ方向、柱要素の縦辺の深さ方向にのみそれぞれ16分割とする. 積分点を8とした Gauss-Lobatto rules により積分計算を行う. また、Newmark  $\beta$  法 ( $\beta = 0.25, \gamma = 0.5$ ) により時間刻み  $dt = 0.01$  秒として時間領域における数値積分を行う.

さらに、モデルの減衰定数として、一次の減衰定数を2%に与えた初期剛性比例減衰を与える. また、上層の柱が下層よりも太くならないような次の制約条件を与える.

$$x_i \geq x_{i+1} \quad (i=1,2,3) \quad (13)$$

### 3.2 最適化の設定

本解析例における主な設定を以下にまとめる.

- 本提案法では設計変数の大きさを揃えることが望ましいので、設計変数の上下限値を0から1に正規化する.
- 制約違反許容値を  $10^{-4}$  と与える. すなわち、 $\max\{g_1(\mathbf{x}), \dots, g_l(\mathbf{x})\} > 10^{-4}$  であれば非許容解とする.
- 問題(1)を問題(2)の形に書き換え、ペナルティ係数を  $\mu = 100$  と与える. なお、この値は初期値であり、第  $k$  回目の Step size parameter update で「失敗」と宣言され、かつ非許容解である場合、その時点でのペナルティ係数  $\mu$  を10倍に更新する.
- 直接探索法において標準的に用いられるパラメータ値である  $\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 2$  を与え、設計変数を0から1に正規化したことから  $\Delta_0 = 0.2, \Delta_{\max} = 0.4$  と与える.
- 終了条件は、時刻歴応答解析の実行回数が3,200回を超えたときとする.
- 設計変数の初期値として  $x_i = 900\text{cm}^2$  ( $i=1,2,3,4$ ),  $x_i = 300\text{cm}^2$  ( $i=5,6,7,8$ ) を与える. これは条件(12)を満たす許容な初期値である.

### 3.3 数値解析結果

前節までの設定に従い得られた設計解を表1に示す. この設計解の目的関数値は247.5であった. 時刻歴応答解析の実行回数3,200回以内での目的関数値の探索履歴を

図5に示す。図5の点線部は非許容解，実線部は許容解を表す。また，この設計解の固有周期を表2に示す。さらに，各設計用地震動に対する各層の最大応答層間変形角を図6に示す。また，比較のために，標準的な非線形計画法の一つである逐次二次計画法<sup>14)</sup>について，差分計算による感度近似を用いて適用したところ，許容解を発見することができなかった。第1節で指摘したように本解析例は標準的な非線形計画法に適さない問題であり，本提案の有効性が例証されたと言える。

表1 発見された設計解 単位：cm<sup>2</sup>

設計変数	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
断面積	421	329	249	190
設計変数	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
断面積	125	271	143	150

表2 設計解の固有周期

	1次	2次	3次
固有周期 [sec]	0.52	0.19	0.10

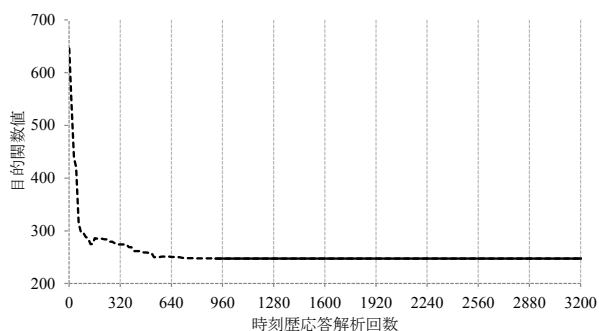


図5 目的関数値の履歴

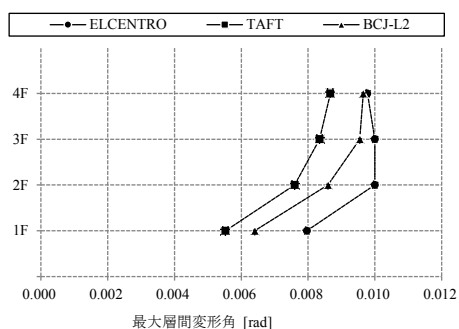


図6 最大応答層間変形角

#### 4. まとめ

弾塑性時刻歴応答解析法を応答評価法として用いることを考慮し，複数の設計用地震動に対する動的応答の最大値を制約条件として考慮したコスト最小化問題に適した方法を提案した。得られた結論は以下の通りである。

- (1) 時刻歴応答解析を含む設計問題では，雑音性を持つ非平滑な条件と連続微分可能な条件の混在が一般的であることを指摘した。
- (2) 時刻歴応答解析を含む設計問題に対して，大域的収束性を確率的に保証できる方法を提案した。
- (3) 4層1スパンの鋼構造平面骨組モデルの数値解析例を用いて，提案法の有効性を確認した。

謝辞 本研究の一部は科学研究費(No.23360245, 研究代表者：上谷宏二)の助成を受けて行われた。

#### [参考文献]

- 1) 金紋延, 荒木慶一, 山川誠, 田川浩, 五十子幸樹: 極大地震動に対する超高層純ラーメン鋼構造建物の動的応答に及ぼす P- $\Delta$  効果の影響, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 74, No. 644, pp. 1861-1868, 2009. 10
- 2) 評定・評価を踏まえた高層建築物の構造設計実務, (財)日本建築センター, 2002
- 3) 大崎純: 不連続特性を有する構造システムの設計感度解析と最適設計, 日本建築学会構造系論文集, No. 465, pp. 147-153, 1994. 11
- 4) C. Audet and J.E. Dennis: Mesh Adaptive Direct Search Algorithms for Constrained Optimization, SIAM Journal on Optimization, Vol. 17, No. 1, pp. 188-217, 2006
- 5) 山川誠, 大崎純, 満田衛資: 弾塑性時刻歴応答を考慮した鋼構造建物の設計問題のための部分的感度情報を用いた最適設計法, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 78, No. 683, 2013. 1 (掲載決定)。
- 6) G. Giorgi, A. Guerraggio, J. Thierfelder and J. Thierfelder: Mathematics of optimization: smooth and nonsmooth case, Elsevier Science, Amsterdam, 2004
- 7) A.R. Conn, K. Scheinberg and L.N. Vicente: Introduction to derivative-free optimization, Society for Industrial Mathematics, Philadelphia, 2009
- 8) K. Fukuda and A. Prodon: Double description method revisited, Combinatorics and Computer Science, M. Deza, R. Euler, and I. Manoussakis, eds., Lecture Notes in Comput. Sci. 1120, pp. 91-111, 1996
- 9) Makoto Ohsaki, Masahiko Katsura: A random sampling approach to worst-case design of structure, Struct Multidisc Optim, Vol. 46, pp. 27-39, 2012
- 10) 吉富信太, 辻聖晃, 山崎雅弘, 上谷宏二: 部材断面寸法をパラメタとした鋼構造立体骨組の最適設計, 構造工学論文集, Vol. 50B, pp. 221-227, 2004. 3
- 11) 高層建築物構造評定委員会: 高層建築物の動的解析用地震動について, 日本建築センター, ビルディングレター, 1986. 6.
- 12) 建設建築研究所・(財)日本建築センター: 設計用入力地震動作成手法技術指針(案), 1992
- 13) PEERC (2006) Open system for earthquake engineering simulation (OpenSees). UCB, CA. Available at <http://opensees.berkeley.edu/>
- 14) Optimization Toolbox 6.1 User's Guide, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2011

\*1 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生  
 \*2 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 助教 博士(工学)  
 \*3 広島大学大学院工学研究科建築学専攻 教授 博士(工学)