

パラメータ変動を有する構造最適化の順序統計量による精度評価

○山川 誠*¹ 大崎 純*²
朝山 秀一*³

キーワード：不確定性 動的解析 構造最適化 順序統計量 ランダムサンプリング

1. はじめに

近年、建築基準法の想定レベルを上回る極大地震の危険性が指摘されている。地震の予測技術は進展しているものの、現在の技術水準では地震の発生を不確定な現象と取り扱わざるを得ない。そのため予測地震動を設計用地震動として用いた場合に、特定の入力に対してのみ安全性が向上するような設計は望ましくなく、不確定性への対処が求められる。このような不確定変動を考慮した設計として、ロバスト設計が知られている^{例えば1)}。ロバスト性とは不確定性に伴う変動に対する強さを意味し、既往の研究として、周波数応答領域の解析に基づいて地震動特性の不確定性を考慮した方法が提案されている²⁾。

本報では、実務設計で用いられる時間領域での弾塑性解析との整合性を重視する立場から、時刻歴応答解析に基づくロバスト設計、とりわけ最適設計と組み合わせたロバスト最適設計を主題として扱う。一般に、このような問題を厳密に解くことは困難である。そのため、構造パラメータに不確定性を有する問題に対し、順序統計量を用いた近似解法が提案されている³⁾。既往の提案の数学的根拠を補強し、扱いやすい形での再定式化を行った上で、地震動特性の不確定性に対してロバスト性を向上させる設計を求めする方法を提案することを本報の目的とする。

2. 反最適化と確率的制約の定式化

2.1 対象問題と最悪値解析

m 次元実変数ベクトル $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ を設計変数とする。 \mathcal{X} は \mathbf{x} が取り得る値の集合とする。設計変数 \mathbf{x} に対して出力が定まるようなシステム $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$ および $h_i = h_i(\mathbf{x})$ ($i=1, \dots, l$) を考える。さらに、設計変数 \mathbf{x} に加えて、 r 次元実変数ベクトル $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)^T \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$ を入力パラメータとするシステム $g = g(\mathbf{x}, \Theta)$ を考える。 Ω は入力パラメータ Θ が取り得る値の集合とする。設計変数 \mathbf{x} は設計者が制御可能な設計パラメータ、入力パラメータベクトル Θ は環境やシステム固有の量を指す。広義には設計者が設計対象とする入力量を \mathbf{x} 、そうではない入力量を Θ とする。以上のような設定の下で、最適設計問題：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} & \Phi(\mathbf{x}), \\ \text{subject to} & g(\mathbf{x}, \Theta) \leq \bar{g} \text{ for all } \Theta \in \Omega \\ & h_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (i=1, \dots, l) \end{array} \right\} \quad (1)$$

を定義する。ここで、 \bar{g} は定数とする。制約関数 g と h_i に

ついては不確定性を考慮するか否かで区別し、不確定性を考慮する関数は簡単のため g のみとする。 Θ に地震動特性を表すパラメータを、 g に地震時応答についての制約関数を、 h_i に不確定性を考慮しない制約関数を、後に対応させるが、この段階では問題を特定せずに一般的なシステムとして考える。ここで、次の仮定をおく。

仮定1. Ω は \mathbb{R}^r の有界閉集合

仮定2. $\text{vol}(\Omega) > 0$

$\text{vol}(\cdot)$ は集合の体積あるいはルベーグ測度を表す。これらの仮定は後で示す Random Search での収束性を保証するために必要となる⁴⁾。

問題(1)は、『最適化問題』と『反最適化問題』からなる二段階問題に書き換えられる⁵⁾。下位問題は関数の最悪値を求める問題として、反最適化問題：

$$\text{Find} \quad g_{\max}(\mathbf{x}) = \max_{\Theta \in \Omega} g(\mathbf{x}, \Theta) \quad (2)$$

と定式化される。下位問題(2)で定義された $g_{\max}(\mathbf{x})$ を用いることにより、元問題(1)を上位の最適化問題：

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} & \Phi(\mathbf{x}), \\ \text{subject to} & g_{\max}(\mathbf{x}) \leq \bar{g}, \\ & h_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (i=1, \dots, l) \end{array} \right\} \quad (3)$$

に書き換えることができる。明らかに問題(1)と問題(3)の最適解は一致する。この種の定式化は広く知られており、最悪ケース解析、bilevel最適化、robust counterpart approach など様々な名前と呼ばれる¹⁾。このような最悪値を用いたアプローチは意味が明確である反面、あまりに保守的な解となる。このような問題に対し、大崎らは予め与えられた精度で反最適化問題を解くための近似解法を提案している³⁾。大崎らの提案の数学的根拠を補強し、扱いやすい形で再定式化する。関連する定式化を、次節に紹介し、概要をまとめる。

2.2 Random Search と確率的制約法

反最適化問題における近似解法の精度評価を本報の主題とする。上位問題の最適化問題を解くためには、例えば大崎らの提案法³⁾を使用することができる。以降では設計変数 \mathbf{x} を固定した反最適化問題のみに着目し、 \mathbf{x} についての依存を省いて記述する。すなわち、条件

$$g(\Theta) \leq \bar{g}, \quad \text{for } \Theta \in \Omega \quad (4)$$

がどの程度の精度で満たされるか判定することを考える。前節で述べたように、最悪ケース制約では式(4)を

$$g_{\max} \leq \bar{g} \quad (5)$$

と書き換える。ここで、

$$g_{\max} = \max_{\Theta \in \Omega} g(\Theta) \quad (6)$$

とする。式(6)にRandom Search(以降ではRSと記す)を適用することにより、何らかの意味での最悪値を求める。RSの一般的なアルゴリズムを以下に示す⁴⁾。

Algorithm 1. (general random search)

Initialization

Ω 上の確率分布 P_1 に従い最初の標本点 Θ_1 を生成し、関数値 $g(\Theta_1)$ を評価する。

For $j=1,2,3,\dots$

1. これまでに得られた標本点 $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_j$ および対応する関数値 $g(\Theta_1), g(\Theta_2), \dots, g(\Theta_j)$ を用いて停止条件を満たすか調べる。もし停止条件が満たされていればアルゴリズムを停止する。
 2. Ω 上の確率分布 P_{j+1} に従い標本点 Θ_{j+1} を生成し、関数値 $g(\Theta_{j+1})$ を評価する。
-

常に同じ確率分布を用いる場合、すなわち $P_1 = P_2 = \dots = P$ とする場合、Algorithm 1はPure Random Search(以降ではPRSと記す)と呼ばれる。本報では最も基本的なRSであるPRSを扱い、 P を Ω 上の一様確率分布とする。PRSから得られた標本点を $\{\Theta_1, \dots, \Theta_n\}$ 、標本点で観測された標本値を $\{Y_1 = g(\Theta_1), \dots, Y_n = g(\Theta_n)\}$ と表す。このとき Y_j は独立同一分布に従う確率変数(independent and identically distributed random variables; 以降iidrvと記す)となり、累積分布関数

$$F_Y(t) = \Pr\{\Theta \in \Omega: g(\Theta) \leq t\} = \int_{g(\Theta) \leq t} P(d\Theta) = \int_{-\infty}^t f_Y(y) dy \quad (7)$$

を持つ。ここで、 f_Y は確率密度関数とする。さらに次の仮定をおく。

仮定3. $F_Y(\cdot)$ は連続型の分布関数とする。

iidrv列 Y_1, \dots, Y_n を昇順に並び替えたものを

$$Y_{1,n} \leq Y_{2,n} \leq \dots \leq Y_{n,n} \quad (8)$$

と表し、式(8)において第 k 番目 ($1 \leq k \leq n$) の確率変数を $Y_{k,n}$ と記す。大崎らは、反最適化問題において

$$Y_{k,n} \leq \bar{g} \quad (9)$$

を扱うことを提案した³⁾。本報では、式(9)の k, n の解釈と選択規則を示す。そのためにパラメータ β, γ を用いた表現

$$\Pr\{F_Y(\bar{g}) \geq \gamma\} \geq \beta \quad (10)$$

を導入する。式(10)でのパラメータ β, γ の解釈は明快である。累積分布関数 $F_Y(\cdot)$ を持つ確率変数を Y とすると、「確率変数 Y の分布のうち $100\gamma\%$ が \bar{g} 以下になる確率は $100\beta\%$ 以上」を意味する^{6,7)}。式(10)は機会制約、最悪ケース制約の一般化であり、大崎らの提案式(9)も、式(10)の形に書き換えることができる。すなわち、 k, n の選択とはパラメータ β, γ の選択と理解される。

3. ノンパラメトリック許容区間と反最適化

3.1 確率分布に依存しない許容区間

共通な累積分布関数 $F_Y(\cdot)$ を持つiidrv列 Y_1, \dots, Y_n を昇順に並び替え

$$Y_{1,n} \leq Y_{2,n} \leq \dots \leq Y_{n,n} \quad (11)$$

と表したとき、 $Y_{1,n}, \dots, Y_{n,n}$ は順序統計量⁶⁾と呼ばれる。特に、第 k 番目 ($1 \leq k \leq n$) の確率変数 $Y_{k,n}$ は第 k 順序統計量と呼ばれる。この第 k 順序統計量 $Y_{k,n}$ の累積分布関数は

$$F_{k,n}(y) = \Pr\{Y_{k,n} \leq y\} = I_{F_Y(y)}(k, n-k+1), \quad (12)$$

と導かれる。ここで、 $I_p(a, b)$ は不完全ベータ関数とし、

$$I_p(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^p t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad (13)$$

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad (14)$$

と定義される。 $0 < \gamma < 1$ に対し、累積分布関数 F_Y をもつ確率変数 Y の γ 分位数 (γ -quantile) は

$$\xi_\gamma = F_Y^{-1}(\gamma) = \inf\{y: F_Y(y) \geq \gamma\} \quad (15)$$

と定義される。このとき、

$$\begin{aligned} \Pr\{F_Y(Y_{k,n}) \geq \gamma\} &= \Pr\{Y_{k,n} \geq F_Y^{-1}(\gamma)\} \\ &= 1 - \Pr\{Y_{k,n} < \xi_\gamma\} \\ &= 1 - \Pr\{Y_{k,n} \leq \xi_\gamma\} \\ &= 1 - I_\gamma(k, n+k+1) \end{aligned} \quad (16)$$

が成り立つ。ここで、仮定3より $\Pr\{Y_{k,n} < \xi_\gamma\} = \Pr\{Y_{k,n} \leq \xi_\gamma\}$ を用いた。よって、ある与えられた β, γ に対し、

$$1 - I_\gamma(k, n+k+1) \geq \beta \quad (17)$$

を満たすように k, n を選べば、式(16)より

$$\Pr\{F(Y_{k,n}) \geq \gamma\} \geq \beta \quad (18)$$

が成立する。式(18)のような定式化において、区間 $(-\infty, Y_{k,n})$ はノンパラメトリック片側許容区間と呼ばれる⁷⁾。区間 $(-\infty, Y_{k,n})$ は累積分布関数 $F_Y(\cdot)$ に依存しないので、 $F_Y(\cdot)$ が未知関数でもよい。 $F_Y(\cdot)$ は増加関数なので、大崎らの条件式(9)が成り立てば、 $F_Y(\bar{g}) \geq F_Y(Y_{k,n})$ である。よ

って、式(17)が満たされるように k, n が選ばれていれば、

$$\Pr\{F(\bar{g}) \geq \gamma\} \geq \Pr\{F(Y_{k,n}) \geq \gamma\} \geq \beta$$

が成り立つ。これは、前節で述べた式(10)そのものである。

3.2 Random Search の停止条件

条件式(17)を満たす k, n の選択とは、RS(Algorithm 1)の停止条件を与えることに他ならない。ある β, γ に対して、条件式(17)を満たすだけ小さい n を見出せば、それがRSに必要な試行回数である。有限な少数の標本から極値(最大値)を予測することは難しく、外れ値に大きく影響を受けるので、 $k=n$ とすることは望ましくない。ここでは、極値からの余地を $\varepsilon \in \mathbb{N}$ と与え、 $k \in \mathbb{N}$ を $k \leq n - \varepsilon$ から選ぶようにする。すなわち、ある β, γ に対して、問題：

$$\left. \begin{array}{ll} \underset{k, n \in \mathbb{N}}{\text{minimize}} & n, \\ \text{subject to} & 1 - I_\gamma(k, n+k+1) \geq \beta, \\ & k \leq n - \varepsilon \end{array} \right\} \quad (19)$$

を解く。 ε にどのような値を与えるべきか明らかでないが、後の数値解析例では $\varepsilon=5$ とした。列挙法により、問題(19)の解 k, n を見い出せば、この n がAlgorithm 1の試行回数、すなわち停止条件になる。 n 回の試行で第 k 番目に小さい標本値が \bar{g} より小さいかどうかを調べることで制約条件(4)が所定の精度で満たされるかを判定できる。

4. 数値解析例

4.1 構造物モデル

図1に示す各層質量100ton、階高3.25mの7層せん断質点系モデルを考える。構造物全体の重量は $W=9,800$ kNである。設計変数を $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_7)^T$ とし、図2に示すようなTri-Linear型に各層の復元力特性を与える。

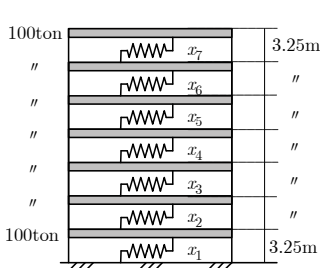


図1 7層せん断質点系モデル

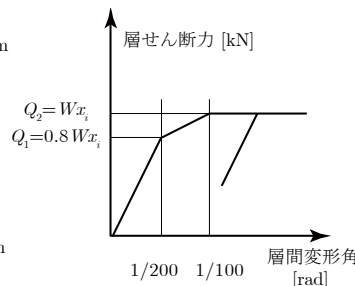


図2 変数 x_i と第 i 層復元力特性関係

4.2 地震動の不確定性モデル

設計用地震動としてOsaka UMT28 NSを与える。Osaka UMT28 NSは大阪府、大阪市により実施された地震被害想定⁸⁾の際に予測された上町断層帯地震についての地震動波形群⁹⁾の一つである。この設計用地震動の地動加速度を $a=a(t)$ と表し、図3(a)に示す。予測地震動には各種の不確定な要素が含まれる。ここでは周期特性に単純な不確定

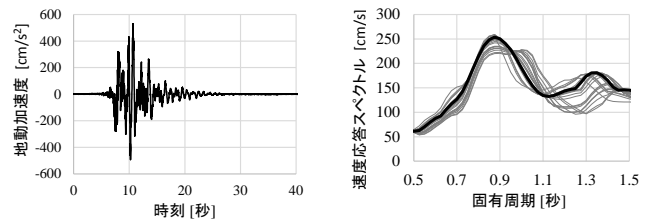
性を与える。時間領域の地震動 $a=a(t)$ に対し、振動数 f を用いたフーリエ変換および逆フーリエ変換をそれぞれ

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{F}[a(t)] = A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{-i(2\pi ft)} dt, \\ \mathcal{F}^{-1}[A(f)] = a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(f)e^{i(2\pi ft)} df \end{array} \right\} \quad (20)$$

と表す。 $a(t)$ に対するフーリエスペクトル $A(f)$ の振幅 $C(f;a)=|A(f)|$ 、位相角 $\theta(f;a)=-\arg A(f)$ はそれぞれフーリエ振幅スペクトル、フーリエ位相スペクトルと呼ばれる。フーリエ振幅スペクトル $C(f;a)$ のみに変動 Δf を与えたフーリエスペクトルを $C(f-\Delta f;a) \cdot e^{-i\theta(f;a)}$ と表す。なお、本定式化では全ての周波数を、同一の変動 Δf だけ動かしている。これをさらに逆フーリエ変換することにより周期特性に変動 Δf が与えられた時間領域の地震動

$$\tilde{a}(t;\Delta f) = \mathcal{F}^{-1}[C(f-\Delta f;a) \cdot e^{-i\theta(f;a)}] \quad (21)$$

が得られる。UMT28-EWに $-0.1 \leq \Delta f \leq 0.1$ の範囲でランダムに変動を与えて作られる地震動20波の速度応答スペクトルを図3(b)の灰色の線に、元のUMT28-EWの速度応答スペクトルを図3(b)の太線に併せて示す。



(a) 加速度波形 (b) 速度応答スペクトル

図3 Osaka UMT28 NS

4.3 不確定変動をうける地震動に対する設計問題

前節までに説明したせん断質点系モデル、不確定性を有する設計用地震動に対し、時刻歴応答解析により評価される最大応答層間変形角を

$$\delta_{\max}(\mathbf{x}; \Delta f) = \max_{i,t} \{ \delta_i(\mathbf{x}, t; \tilde{a}(t; \Delta f)) \} \quad (22)$$

と表す。ここで、 Δf は地震動特性の不確定パラメータ、 $\delta_i(\mathbf{x}, t; \tilde{a}(t; \Delta f))$ は変動 Δf を受けた地震動に対する設計 \mathbf{x} の時刻 t の第 i 層間変形角を表し、1次の減衰定数を2%とする初期剛性比例減衰を与えたNewmark β 法 ($\beta=1/4$, 時間刻み0.01sec)により評価する。以上を用いて最大応答最小化問題：

$$\left. \begin{array}{l} \min_{(\mathbf{x}, \bar{\delta})} \quad \bar{\delta}, \\ \text{subject to} \quad \delta_{\max}(\mathbf{x}; \Delta f) \leq \bar{\delta} \quad \text{for } \Delta f \in \Omega \\ \sum_{i=1}^{10} x_i \leq 2.1 \\ 0.05 \leq x_i \leq 0.4 \quad (i=1, 2, \dots, 10) \end{array} \right\} \quad (23)$$

を定義する。不確定変動が生じない場合、すなわち $\Omega=\{0\}$ と与えた場合の局所解の一つは

$$\mathbf{x} = (0.39, 0.37, 0.34, 0.30, 0.25, 0.18, 0.11) \quad (24)$$

と得られている¹⁰⁾。この設計解では、一次固有周期 0.90sec, 最大層間変形角 $\bar{\delta} = 0.0135$ rad となる。次節以降では、設計変数 \mathbf{x} をこの値に固定して不確定性の検討を行う。

4.4 最悪ケース制約の検証

元問題 (23) に対応する最悪ケース制約を、2.2節のように設計変数 \mathbf{x} を省いて表記すると

$$\delta_{\max}(\Delta f) \leq \bar{\delta}, \quad \text{for } \Delta f \in \Omega \quad (25)$$

となる。ここで、生じうる不確定変動の領域を

$$\Omega = \{\Delta f \mid -0.1 \leq \Delta f \leq 0.1\} \quad (26)$$

と与える。 Ω 上の一様確率分布 P を用いた PRS から得られる標本点を $\{\Delta f_1, \dots, \Delta f_n\}$, 対応する標本値を $\{Y_1 = \delta_{\max}(\Delta f_1), \dots, Y_n = \delta_{\max}(\Delta f_n)\}$ と表す。 Y_j は未知の累積分布関数 $F_Y(\cdot)$ に従う iidrv 列とする。このとき、

$$\Pr\{F_Y(\bar{\delta}) \geq \gamma\} \geq \beta \quad (27)$$

を満たし、かつできるだけ小さい最悪応答 $\bar{\delta}$ を求めることを考える。 $\beta = 0.9, \gamma = 0.9$ と与え、 $\varepsilon = 5$ として問題 (19) を解くと、 $(k, n) = (86, 91)$ と得られる。すなわち、PRS により得られる 91 標本の中で、第 86 番目に小さい (第 6 番目に大きい) 標本値 $Y_{86,91}$ を用いれば良いことがわかる。独立な 5 ケースの試行を行い、それぞれで得られた $Y_{86,91}$, および参考に $Y_{91,91}$ を表 1 に示す。加えて、検証として試行をそれぞれ 1,000 回まで続け、各 1,000 標本中の $Y_{86,91}$ 以下になる標本数、全体に占めるその割合、最大値も併せて表 1 に示す。

表 1 検証結果

case	1	2	3	4	5
$Y_{86,91}$ [rad]	0.0197	0.0198	0.0199	0.0205	0.0204
$Y_{91,91}$ [rad]	0.0208	0.0208	0.0205	0.0209	0.0210
(1,000 個の標本による検証結果)					
$Y_{86,91}$ 以下の 標本数	929	927	936	960	955
$Y_{86,91}$ 以下の 割合	0.93	0.93	0.94	0.96	0.96
$Y_{1000,1000}$ [rad]	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210

表 1 における「 $Y_{86,91}$ 以下の割合」が、 $\gamma = 0.9$ に相当する数値である。表 1 では 0.9 より大きい安全側の評価となっていることがわかる。確率分布を未知とするノンパラメトリック許容区間は安全側の評価となることが知られており⁷⁾, 本報での結果もそれを裏付けるものとなった。なお、試行 91 回中の最大値 $Y_{91,91}$ は順序統計量 $Y_{86,91}$ よりも安定している。本解析例のように変動パラメータ数がある場合は、応答

関数にもよるが、比較的少数の標本でも極値統計量 (最大値) のふるまいは安定していると予想され、 ε をより小さくしてもよいと考えられる。よって、予測精度の向上のためには、変動パラメータ数、 ε の選択規則等、さらなる検討が必要である。

5. まとめ

地震動特性の不確定性に対してロバスト性を高めた設計解を得るための方法について、以下の結論を得た。

- 1) 反最適化 (最悪ケース解析) において、順序統計量を用いることの数学的根拠を補強し、扱いやすい形での再定式化を行った。
- 2) 地震動の不確定性を考慮したロバスト最適設計の一例として、地震動のフーリエ振幅スペクトルに不確定性を与えた問題を定式化し、数値解析例を通じて検討を行った。
- 3) 順序統計量を用いることにより所定の予測精度を満たせることを、解析例により確認した。ただし、安全側の評価となっており、予測精度向上には、さらなる検討が必要である。

謝辞 本研究の一部は公益財団法人大林財団 平成 24 年度研究助成、および JSPS 科研費 (No. 25420576) の助成を受けて行われた。

【参考文献】

- 1) 日本建築学会, 応用力学シリーズ 12 建築構造設計における冗長性とロバスト性, 2013.
- 2) I. Takewaki, Critical excitation methods in earthquake engineering, Elsevier Science, 2007.
- 3) M. Ohsaki and M. Katsura, A random sampling approach to worst-case design of structures, Structural and Multidisciplinary Optimization, 46 (1), 27-39, 2012.
- 4) A. Zhigljavsky and A. Zilinskas, Stochastic global optimization. Springer, New York: 2010.
- 5) I. Elishakoff and M. Ohsaki, Optimization and anti-optimization of structures under uncertainty, World Scientific, London, 2010.
- 6) H.A. David and N.N. Haikady, Order statistics, 3rd Ed, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2003.
- 7) K. Krishnamoorthy and T. Mathew, Statistical Tolerance Regions: Theory, Applications, and Computation, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2009.
- 8) 大阪府, 大阪府自然災害総合防災対策検討 (地震被害想定) 報告書, 2007.
- 9) 大阪府, 大阪府平成 19 年度想定標準地震動添付資料, 2008.
- 10) 山川誠, 時刻歴応答解析における微分不可能性を考慮した大域的直接探索法, 構造工学論文集, Vol.58B, pp.319-326, 2012

*1 東京電機大学未来科学部建築学科 准教授 博士(工学)

*2 広島大学大学院工学研究科建築学専攻 教授 博士(工学)

*3 東京電機大学未来科学部建築学科 教授 工学博士