最適化手法を用いた形態変化機構の設計

○大崎　　純*1　津田　勢太*2
寒野　善博*3

キーワード：形態変化機構　メカニズム　線形計画法

1. 序

建築の仮設構造やシェルターなどの開閉機構や展開構造などの形態変化機構については多くの研究が存在するが，それらのほとんどは，幾何学的な式表現で機構条件を導いている[1]。一方，機械工学の分野でのメカニズムに対して，指定した変形性能を持つ機構を求めるため，最適化手法に基づく方法が提案されている[2,3]。しかし，大変形のメカニズムを実現するためには，最適化の各ステップで幾何学的非線形解析を実行する必要がある。また，希望する変形に近い変形を有する初期許容解を見出すことも困難である。

一方，メカニズム設計の手法のほとんどは平面機構を対象としている。また，立体機構を実現する際に，3 軸まわりに回転可能なジョイントを持つ構造は極めて高価かつ製作困難である。したがって，1 軸あるいは 2 軸まわりに回転可能な部分剛接合された構造とするのが望ましい。著者らは，極限解析問題に類似の線形計画問題を解いて，メカニズムを求める方法を提案した[4,5]。

本研究では，線形計画問題を解いてメカニズムを求めることにより，大変形の展開構造を求める方法を検討する。

2. 基礎式の導出

与えられた剛接骨組の材端の回転拘束を解放し，あるいは部材を除去して，メカニズムを生成する。骨組の変位の自由度を d，変位ベクトルを $\boldsymbol{u}=(u_1,\ldots,u_d)^{\mathrm{T}}$ とする。次節の線形計画問題を解く段階では微小変形を仮定し，骨組の適合条件を

$$c_i = \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u},\quad i=1,\ldots,n \tag{1}$$

のように表す。ただし，$\boldsymbol{c}=(c_1,\ldots,c_n)^{\mathrm{T}}$ は材端の回転角と軸方向の伸びを含む一般化ひずみベクトルであり，$\boldsymbol{h}_i=(h_{i1},\ldots,h_{id})^{\mathrm{T}}$ $(i=1,\ldots,n)$ は定ベクトルである。また，部材数を m とおくと，平面骨組では $n=3m$，立体骨組では $n=6m$ が成り立つ。

メカニズムの入力節点および出力節点の指定方向の変位を u_{in} および u_{out} で表す。メカニズムの自由度（不安定次数）が 1 であれば，入力と出力の区別はなく，メカニズムの設計法を用いて形態変化機構を設計できる。したがって，以下ではメカニズムを対象とした表現を用いる。

骨組の節点における剛接合を部分的に解放することで，u_{in} の指定値 $\bar{u}_{\mathrm{in}}$ を与えると外力なしの変形で u_{out} が最大になるようなメカニズムを設計する問題を考える。このようなメカニズムは，不定な線形方程式系(1)と

$$u_{\mathrm{in}} = \bar{u}_{\mathrm{in}} \tag{2}$$

を満たす。

このとき，c_i が非ゼロとなる自由度に対応する接合部の拘束を解放あるいは部材を除去すればメカニズムが得られ，対応する解 $\boldsymbol{u}$ がメカニズムの変形のモードを表す。

しかし，式(1)と(2)を満たす解は無数にあり，$\boldsymbol{c}$ の多くの成分が 0 でない値をとる解は変形の不安定次数が大きい非実用的な解である。したがって，現実的なメカニズムを得るためには，$\boldsymbol{c}$ の非ゼロの成分が少ないような解を求める必要がある。

3. 線形計画問題の定式化

制約条件(1)，(2)の下で u_{out} を最大化する問題において，以下のように，$\boldsymbol{c}$ の（重み付きの）ℓ_1 ノルムをペナルティとして課すことで $\boldsymbol{c}$ の非ゼロの成分が少ない解が得られるものと期待できる。

$$\begin{aligned} \max \quad & u_{\mathrm{out}} - \alpha\sum_{i=1}^{n}|w_i c_i| \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & c_i = \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u},\quad i=1,\ldots,n \\ & u_{\mathrm{in}} = \bar{u}_{\mathrm{in}} \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$\alpha>0$ はペナルティ係数であり，$w_i>0$ $(i=1,\ldots,n)$ は重み係数である。解放したくない接合部の自由度に対しては，w_i を十分に大きい値とすることで最適解において $c_i=0$ となることが期待できる。以下の例では，c_i が材端の回転角に対応するときと部材の伸びに対応するときで，異なる値を w_i に与える。

問題(3)は，補助変数 γ_i $(i=1,\ldots,n)$ を導入することで，次のような標準的な線形計画問題に変換できる。

$$\begin{aligned} \max \quad & u_{\mathrm{out}} - \alpha\sum_{i=1}^{n} w_i\gamma_i \\ \mathrm{s.\,t.} \quad & -\gamma_i \le \boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \le \gamma_i,\quad i=1,\ldots,n \\ & u_{\mathrm{in}} = \bar{u}_{\mathrm{in}} \end{aligned} \tag{4}$$

問題(4)の双対問題は，$\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 及び λ を最適化の変数として，

$$\begin{aligned} &\max \quad \bar{u}_{\mathrm{in}}\lambda \\ &\text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{h}_i = \boldsymbol{p}_{\mathrm{out}} + \lambda \boldsymbol{p}_{\mathrm{in}} \\ &\qquad \alpha w_i \geq |y_i|, \quad i = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{5}$$

と書ける。この問題は，骨組の極限解析の下界定理による定式化と同じ形式を有する。すなわち，$y_i \quad (i=1,\ldots,n)$ は一般化応力（軸力，曲げモーメント，ねじりモーメント）に相当し，λ は荷重係数に相当する。また，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{out}}$ および $\boldsymbol{p}_{\mathrm{in}}$ は，それぞれ，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{out}}$ および $\boldsymbol{u}_{\mathrm{in}}$ にあたる自由度の成分が1でその他の成分が0である定ベクトルである。つまり，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{out}}$ は骨組の極限解析における固定荷重に相当し，$\lambda \boldsymbol{p}_{\mathrm{in}}$ が比例載荷荷重に相当するとみなせる。u_{out} が複数の成分に対応するときには，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{out}}$ の複数の成分が0でない値をとる。

上記のように変数を解釈すると，問題(5)の等式制約は，外力と内力の釣合式に相当する。さらに，$\bar{u}_{\mathrm{in}}$ は定数であり，αw_i を降伏軸力あるいは全塑性モーメントと考えると，問題(5)は, 不等式制約を降伏条件とみなしたときの下界定理に基づく極限解析の問題である。以上のように，極限解析と等価な線形計画問題を解いて，メカニズムを求めることができる。

次節では, 問題(5)を解いてさまざまなメカニズムを求める。また，以下の問題を解いて，$\mu \boldsymbol{p}_{\mathrm{out}}$ が作用したときの崩壊荷重係数 μ^{c} を求めて，問題(6)に許容解が存在するための α の下限値を予測する。

$$\begin{aligned} &\max \quad \mu \\ &\text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{h}_i = \mu \boldsymbol{p}_{\mathrm{out}} \\ &\qquad w_i \geq |y_i|, \quad i = 1,\ldots,n \end{aligned} \tag{6}$$

問題(6)の最適解での y_i の値を y_i^{c} とすると，最適解で不等式制約条件（降伏条件）を等号で満たす一般化応力は，$\alpha = 1/\mu^{\mathrm{c}}$ とした問題(5)でも $\lambda = 0$ で不等式制約を等号で満たし，不等式制約を満たさない成分は存在しない。したがって，$\alpha > 1/\mu^{\mathrm{c}}$ とすると，$\lambda = 0$ で等式制約条件（釣合い式）を満たし，かつ不等式制約をすべての成分で不等号 $w_i > y_i$ で満たすような $y_i \quad (i=1,\ldots,n)$ が存在する。したがって，$\alpha \geq 1/\mu^{\mathrm{c}}$ のとき問題(5)には許容解が存在する。

4. メカニズム生成例

以下では, 問題(5)を逐次解いて大変形のメカニズムを求める。この問題の変数は，一般化応力と荷重係数なので，変形状態が得られない。そこで，等式制約条件と不等式制約条件それぞれのラグランジュ乗数から，節点変位と材端ひずみを求める。問題(5)の最適解でのラグランジュ乗数は，問題(4)の最適解である。非ゼロのひずみ成分が回転角のとき，曲げあるいはねじりのヒンジにより回転拘束を解放し，伸びのとき部材を除去する。

以下の全ての例では，単位を省略し，ユニットを 1×1 の正方形とし，$\bar{u}_{\mathrm{in}} = 1.0$ とする。また，各例の図において，■は剛接合，○は紙面に垂直な軸まわりの回転拘束の解放，太線 ▮ は線回りの回転拘束の解放を意味する。

4.1 モデル 1

図 1 のような平面骨組を対象として, 節点 A を下に変位させたときに, 節点 B が上に変位するようなメカニズムを生成する。

このモデルは，仮に全ての部材端をヒンジ接合としても内的に不静定であり，不要な部材を除去しない限り，メカニズムにはならない。

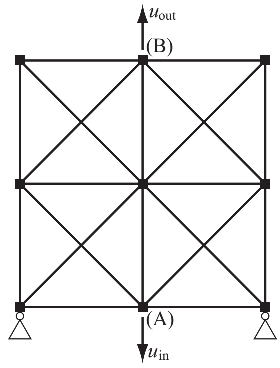
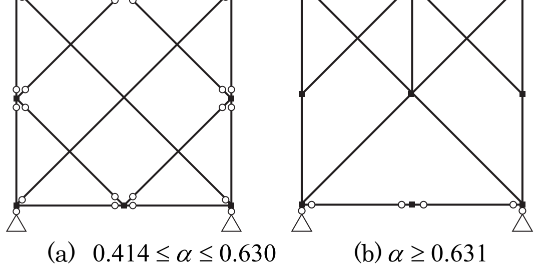


図 1: 平面モデル（モデル 1）の境界条件と載荷条件

w_i の値は軸降伏に対して 1.0，曲げに対して 0.0001 とする。まず，パラメータ α の範囲について考察するため，問題(6)を解いて崩壊荷重係数 μ^{c} を求めると，2.415 となった。したがって，問題(5)には $\alpha \geq 1/2.415 = 0.414$ のとき許容解が存在する。$\alpha = 0.5$ のときの解を図 2(a)に示す。荷重係数は 1.001 である。

$\alpha \geq 0.631$ とすると，$u_{\mathrm{out}} = 0.0$ となり，図 2(b)のような局所変形のメカニズムが得られた。このように，最適化問題を解いて得られるメカニズムは，パラメータに大きく依存する。



(a) $0.414 \leq \alpha \leq 0.630$　　(b) $\alpha \geq 0.631$

図 2: メカニズムとヒンジ位置

パラメータの範囲を問題(3), (4)で解釈すると，$\alpha < 0.414$ の場合はペナルティ項が小さくなり，自由な変形を許容して u_{out} が無限に大きくなることができるため，最適値が有界でなくなる。また，α が大きいと，入力点のみが動くメカニズムとなってしまう。問題(4)の最適値が有界でないとき，その双対問題である問題(5)には許容解は存在しない。

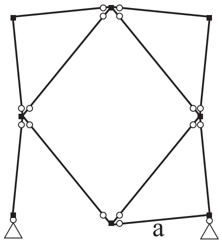


図 3: 変形状態を初期解とした解（$\alpha = 0.4$）

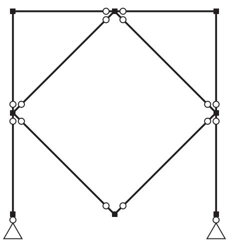


図 4: 大変形メカニズム

ところで，図 2(a)のメカニズムは微小変形のメカニズムである。そこで，メカニズムの変位成分の最大値が 0.1 となるように正規化し，図 1 の初期形状から節点位置を更新した形状を用いて，問題(6)を解くと，崩壊荷重係数は 2.675 となり，問題(5)において $\alpha \geq 1/2.675 = 0.374$ のとき許容解が存在する。そこで，$\alpha = 0.4$ として問題(5)を解くと，図 3 のような非対称な解が得られた。

図 3 の解の一般化ひずみベクトルと変位ベクトルを $\boldsymbol{c}^{\mathrm{I}}$，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}$ とすると，$c_i^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{h}_i \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}$ であり，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}$ は問題(4)の最適性条件を満たす。いま，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}$ を左右対称に変換した変位ベクトルを $\boldsymbol{u}^{\mathrm{II}}$ とすると，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{II}}$ も最適性条件を満たす。さらに，$(\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{II}})/2$ も最適性条件を満たすので，$(\boldsymbol{c}^{\mathrm{I}} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{II}})/2$ に対応するヒンジを有するメカニズムも問題(4)の解である。得られたメカニズムを初期形状で示す図 4 のようになる。このメカニズムが大変形のメカニズムであることを，ABAQUS [6]を用いた解析によって確認した。

4.2　モデル 2

図 5 に示すような，モデル 1 を大きくして部材を増やしたモデル 2 を対象としてメカニズムを生成する。w_i はモデル 1 と同じとする。

問題(6)の崩壊荷重係数を求めると，2.474 となり，問題(5)は $\alpha \geq 1/2.474 = 0.404$ のとき許容解が存在する。$\alpha = 0.5$ のとき，図 6(a)に示すような局所モードを有する解が得られた。このモデルでは。α を 0.404 に近づけても，大域モードは得られなかった。

局所モードは，軸方向伸びを生じさせたくない部材の w_i を十分に大きくすることで回避することができる。図 5 に示した部材 a, b, c, d の伸びに対して w_i=10000.0 とし，$\alpha = 0.405$ すると，部材 a, b, c, d は降伏せず，図 6(b)に示すような全体が変形するメカニズムが得られる。

しかし，このメカニズムは微小変形のメカニズムである。そこで，モデル 1 と同様に節点位置を更新して問題(6)を解くと，崩壊荷重係数は 2.584 となり，$\alpha \geq 1/2.584 = 0.387$ のとき，問題(5)には許容解が存在する。そこで，$\alpha = 0.388$ として問題(6)を解くと，図 6(c)のようになった。この解から対称な解を作成し，初期形状で示すと図 6(d)のようになる。この解の不安定次数は 2 であり，入力節点の水平方向変位を拘束して下方向に移動させると，出力節点が上方向に移動する大変形メカニズムであることを，ABAQUS [6]を用いた解析によって確認した。

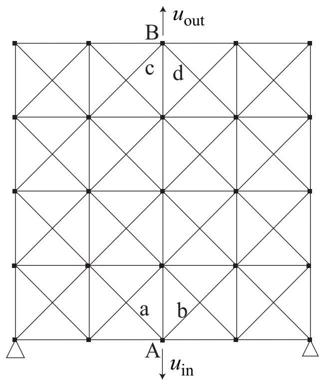
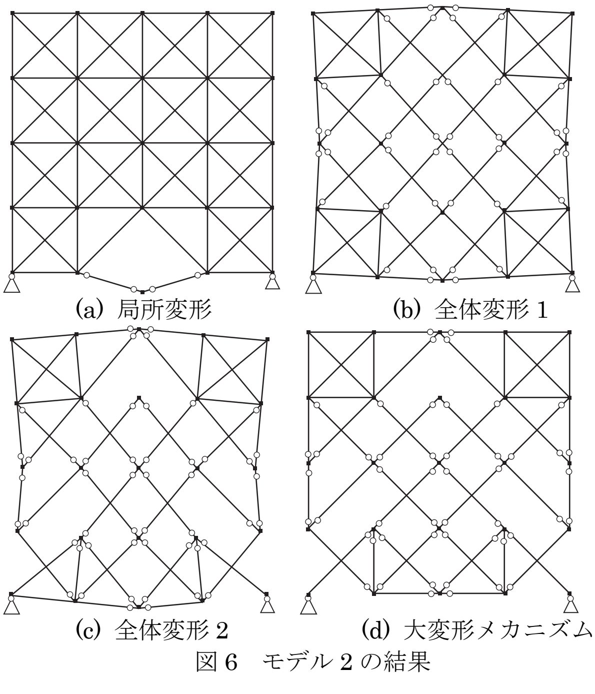


図 5: 平面モデル（モデル 2）の境界条件と載荷条件



(a) 局所変形　　(b) 全体変形 1

(c) 全体変形 2　　(d) 大変形メカニズム

図 6　モデル 2 の結果

4.3 モデル 3

図 7 のような 3 次元空間内のグリッドのメカニズムを求める。Z 軸は紙面上方向である。節点 2, 4 を Y, Z 方向，節点 3, 5 を X, Z 方向に支持し，節点 1 を Z 軸負の方向に変位させたときに，節点 6, 7, 8, 9 が Z 軸正の方向に移動するようなメカニズムを求める。

$\alpha = 0.5$ として問題(5)を解くと，図 8(a)のような非対称なメカニズムが得られた。モデル 1 と同様の考察により，図 8(a)の解と対称な解との重ね合わせから，図 8(b)のよう

な対称なメカニズムを有する解が得られる。

モデル 2 と同様に，変位モードを用いて節点位置を更新し，対称性を利用して得られた解を図 8(c)に示す。このメカニズムは微小変形メカニズムであるが，周辺部材のねじりを解放すると，大変形メカニズムとなる。

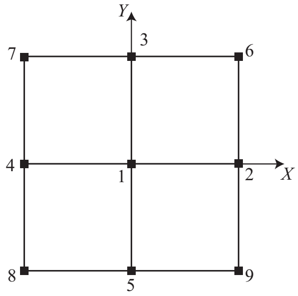
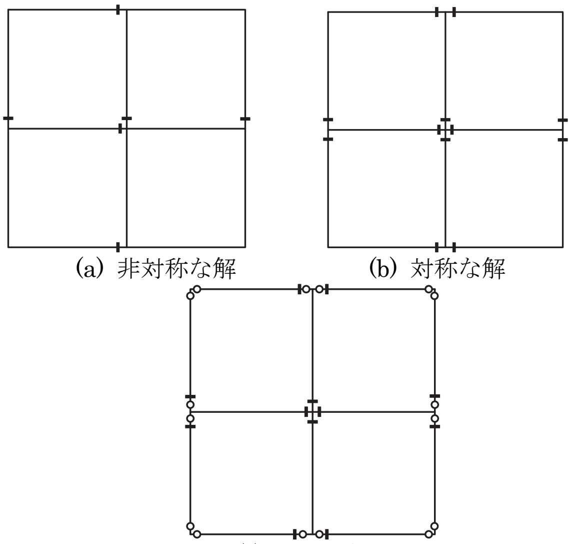


図 7　立体グリッドモデル（モデル 3）



(a) 非対称な解　(b) 対称な解

(c) 対称な解 2

図 8　モデル 3 の結果

4.4 モデル 4

図 9 のような立体モデルを考える。ここで，節点 1 は X, Y 方向，節点 2, 3 は Y, Z 方向，節点 4, 5 は X, Z 方向に支持されている。

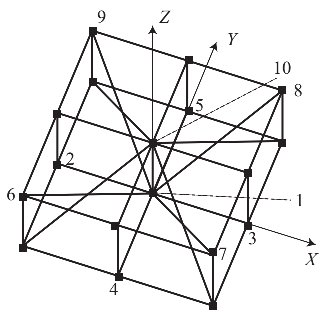
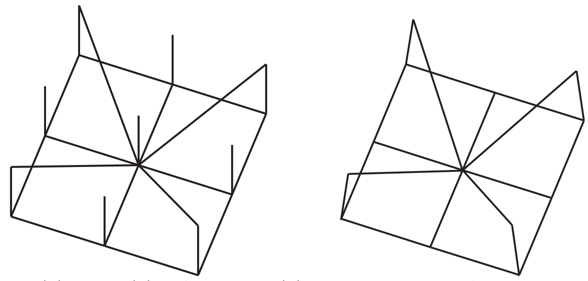


図 9　立体モデル（モデル 4）

入力節点 1 を下向きに変位させたときに，上面隅の出力節点 6, 7, 8, 9 が上面中央の節点 10 の方向へ変位するようなメカニズムを求めることにより，展開構造物を生成する。このようなメカニズムは，部材が削除されないと得られないので，軸方向降伏についても $w_i = 1.0$ とする。$\alpha = 0.3$ として問題(5)を解くと，図 10(a)のような解が得られた。ここで，四隅以外の鉛直部材は明らかに不要である。材端ヒンジ分布は省略するが，変形状態は図 10(b)のようになる。



(a) 問題(5)の解　(b) メカニズムの変形状態

図 10　モデル 4 の結果

5. 結論

1. 剛接合骨組の部材端での拘束を解放して，メカニズムを求める方法を提案した。本手法では，塑性極限解析と同形式の線形計画問題を解いて，微小変形のメカニズムを求めることができる。
2. メカニズムの方向に節点位置を更新して線形計画問題を解くことによって，大変形のメカニズムが得られる可能性があることを示した。
3. 立体構造への適用例を通じて，形態変化機構への適用可能性を確認した。

[参考文献]

[1] C. J. Gantes, Deployable Structures: Analysis and Design. WIT Press; 2001.

[2] M. Ohsaki and S. Nishiwaki, Shape design of pin-jointed multistable compliant mechanism using snapthrough behavior, Struct. Multidisc. Optim., 30, 327-334, 2005.

[3] M. Ohsaki *et al.*, Enumeration of optimal pin-jointed bistable compliant mechanisms with non-crossing members, Struct. Multidisc. Optim., 37, 645-651, 2009.

[4] 津田勢太，大崎 純，菊川翔平，寒野善博，部分剛接合骨組の安定性評価とメカニズムの解析，日本建築学会構造系論文集，Vol. 78, No. 686, pp. 791-798, 2013.

[5] M. Ohsaki, Y. Kanno and S. Tsuda, Linear programming approach to design of link mechanisms of partially rigid frames, Proc. 10th World Congress of Struct. Multidisc. Optim. (WCSMO10), Orlando, FL, Paper No. 5137, 2013.

[6] ABAQUS Ver.6.11 Documentation, SIMULIA, 2011.

*1　広島大学大学院・建築学専攻　教授　博士（工学）

*2　岡山県立大学・デザイン工学科　准教授　博士（工学）

*3　東京大学大学院・数理情報学専攻　准教授　博士（工学）