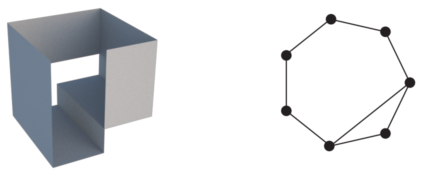
極小剛な Panel-Hinge グラフの列挙及び形態デザインへの応用

○小林 祐貴[*1] 岡野 知広[*2]
加藤 直樹[*3] 瀧澤 重志[*4]

キーワード : Panel-hinge フレームワーク　Panel-hinge グラフ　組合せ剛性理論　アルゴリズミック·デザイン

1　はじめに

本研究で扱う **panel-hinge フレームワーク**とは, **ヒンジ**によってつながれた 2 次元の剛な**パネル**の集合である (図 1(a)). パネルは $\mathbb{R}^3$ において連続的に動くことが許されている. ここでのヒンジとは直線で, ヒンジによってつながれた 2 つのパネルの動きはヒンジ周りの回転である. すべてのパネルの動きが, 元々の構造体の合同変換のみである場合, そのフレームワークは**剛**であるとよぶ. さらに, 剛なフレームワークから任意のヒンジを 1 つ取り除いた場合, 柔軟になるフレームワークのことを**極小剛**とよぶ. ここで, panel-hinge フレームワークをグラフ $G=(V,E)$ と写像 $\boldsymbol{p} \to \mathbb{R}^3$ の組 $(G,\boldsymbol{p})$として考える. $v \in V$ はパネルに対応し, $uv \in E$ は 2 つのパネル u, v をつなぐヒンジ $\boldsymbol{p}(uv)$ に対応する. このとき, $\mathbb{R}^3$ 上に G が実現されたといい, このグラフ G を **panel-hinge グラフ**とよぶ (図 1(b)). このグラフを 5 重化し, 6 つの辺素な全域木を詰込み可能なグラフのことを剛な panel-hinge グラフとよび, 任意の 1 辺を取り除いた場合に剛ではなくなるグラフのことを極小剛な panel-hinge グラフとよぶ.



(a)　　(b)

図 1　(a) panel-hinge フレームワーク (b) panel-hinge グラフ

Tay [10] と Whiteley [12] はそれぞれ, 一般的な panel-hinge フレームワークの剛性が, panel-hinge グラフにより定まることを示した. panel-hinge フレームワークの剛性行列が, すべての部分グラフにおいて最大のランクをもつとき, そのフレームワークは一般的であるという [14]. 剛な panel-hinge グラフを一般的ではないヒンジ配置で実現したとき, 剛ではない場合があることに注意する.

組合せ剛性理論とは, 構造物の接続関係をグラフとして扱うことで, その剛性についての特徴付けを組合せ的に行う理論であり, 様々な構造物の特徴付けが成されている.

本論文では, [2] で開発した操作を 3 章で紹介し, その操作に基づいた直交する 3 種類のパネルによる極小剛なフレームワーク生成手法を提案する. この生成手法及び, 生成した形態を 4 章に記す. ここでは, 垂直水平なパネルの追加を想定していることから, 一般的ではないヒンジ配置のパネルを追加している. しかし, 4 章で提案するパネル追加操作により得られるフレームワークは常に剛となることを証明している.

1.1　背景と目的

近年, アルゴリズミック・デザインと呼ばれる設計手法が再注目されている [15]. このデザイン手法により, 複雑な形態を容易に創り出すことが可能となっている. しかし, 構造的な合理性をもたない形態操作にすぎない場合や, 建築のファサードなど表面的で 2 次元的な利用にとどまっている場合も見られる.

構造物が剛かどうかを判定する問題は構造力学分野においては, 剛性行列のランクを計算することによって解決が為されている. 組合せ剛性理論は構造物の剛性に関する基礎的知見を与えることに留まらず, 機械設計やタンパク質の挙動シミュレーション・知的 CAD の開発・センサーネットワークのローカライゼイション等, 90年代後半から様々な分野において応用されている [8].

1.2　既往研究

剛な棒材 (bar) とピン接合 (joint) で組まれる 2 次元 bar-joint フレームワーク (平面トラス構造) が, 極小剛であるための必要十分条件は Laman によって示されており [4], そのようなグラフを **Laman グラフ**とよぶ. Laman グラフに対応する bar-joint フレームワークは静定トラスに相当する. 2 次元のグラフを $G=(V,E)$ とし, 以下の特徴付けが為されている [4].

定理 1 (G.Laman) 頂点数 $|V| \geq 2$ のグラフ $G = (V, E)$ が最小の辺数で剛 (Laman グラフ)であるための必要十分条件は以下の条件が成り立つことである.

$$\begin{array}{rcll} |E| & = & 2|V| - 3 & \\ |E(X)| & \leq & 2|X| - 3 & \forall X \subseteq V \text{ with } 2 \leq |X| \leq |V| \end{array}$$

ここで $E(X)$ とは頂点集合 $X \subseteq V$ によって誘導される辺集合を指す.

この Laman グラフを演繹的に生成する手法については, Henneberg 構築という方法が知られており, これによりすべての Laman グラフを生成できることがわかっている [1, 13]. さらにマトロイドの性質を利用する [11] のアルゴリズムにより, 高速にすべての Laman グラフを列挙可能であることも知られている.

3 次元剛性の場合, 一般的な組合せ的特徴付けが難しいことが知られている [13]. 一方で, 特殊な 3 次元構造物については組合せ的な特徴付けが為されている. Tay, Whiteley らにより, body-bar, body-hinge フレームワーク (図 2(a) および (b)) といった 3 次元 bar-joint フレームワークの特殊な構造の特徴付けが為されている [12]. Body-bar フレームワークとは, 剛な棒材 (bar) によってピン接合でつながれた剛体 (body) の集合である. 一般的なジョイント配置の body-bar フレームワークに関して, 極小剛な body-bar フレームワークに対応する極小剛な body-bar グラフは, 6 つの辺素な全域木によって, 剛性を特徴づけることができることを Tay は示した [9]. また, 極小剛な body-bar グラフは, 6 つの辺素な全域木を 6 つのグラフ的マトロイドの和集合とみなし, [11] のアルゴリズムを用いることですべて高速に列挙可能である.

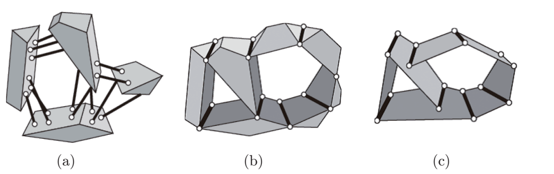


図 2　(a) body-bar フレームワーク (b) body-hinge フレームワーク (c) panel-hinge フレームワーク

Katoh らは panel-hinge フレームワークに関して, パネルを剛体として扱うことで body-hinge フレームワーク (図 2(c)) と同様の議論が可能であることを示している [3]. body-hinge グラフや panel-hinge グラフに関してはグラフの特性上, body-bar グラフと同様なアルゴリズムで列挙することはできず, 多項式時間で列挙するアルゴリズムはこれまで知られていなかった.

Panel-hinge フレームワークの特殊な場合である折紙は, その形態生成に関して多くの研究がなされており, Lang による意図した構造を持った形を折り出すための理論 [5] や, それを実現するためのソフトウェア TreeMaker [6] などが考案されている.

2　準備

ここでは, 3 章および 4 章に関する, これまで知られている事実を記す.

2.1　剛性行列

パネルの合同変換は同次座標系を用いることで, 平行移動と回転を共に含んだ 4×4 の行列 M で表すことができる. ここで, 2 つのパネル B, B' がヒンジ H によって接続されているとし, H の両端点の同次座標を $\boldsymbol{p_1} = (p_{1,x}, p_{1,y}, p_{1,z}, 1)$, $p_2 = (p_{2,x}, p_{2,y}, p_{2,z}, 1)$ とする. そして, パネルの動きを表す行列 M, M' がそれぞれ B, B' に与えられているとする. このとき, ヒンジによる制約は $M\boldsymbol{p}_1 = M'\boldsymbol{p}_1$, $M\boldsymbol{p}_2 = M'\boldsymbol{p}_2$ と表すことができる. この等式を微分して, 以下の式が得られる.

$$I\boldsymbol{p}_i = I'\boldsymbol{p}_i \quad \text{for } i = 1, 2 \tag{1}$$

I および I' は B, B' に割り当てられた無限小動きとみなすことができる. ここで, panel-hinge フレームワーク $(G, \boldsymbol{p})$ をグラフ $G = (V, E)$ と各辺 $e \in E$ の, $\boldsymbol{p}(e)$ に関する埋込み $\boldsymbol{p}$ の組とする. $\boldsymbol{p}(e)$ は e に対応するヒンジの埋込みとする. 無限小動きの定義より, すべての $e = uv \in E$ について, 以下の等式を満たす無限小動きに直交するベクトル $r_i(\boldsymbol{p}(e))(1 \leq i \leq 5)$ をとることができ, このとき S を $(G, \boldsymbol{p})$ の無限小動きとよぶ.

$$(S(u) - S(v)) \cdot r_i(\boldsymbol{p}(e)) = 0$$

すなわち, (1) 式の無限小動きは $5|E|$ 個の等式で記述され, $5|E| \times 6|V|$ の行列 $R(G, \boldsymbol{p})$ を

$$\begin{array}{c} \\ e{=}uv \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \cdots & u & \cdots & v & \cdots \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots\mathbf{0}\cdots & r(\boldsymbol{p}(e)) & \cdots\mathbf{0}\cdots & -r(\boldsymbol{p}(e)) & \cdots\mathbf{0}\cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{array}\right)
\end{array}$$

とする. ここで, $r(\boldsymbol{p}(e))$ は $5{\times}6$ の行列であり, $r(\boldsymbol{p}(e)) = \begin{pmatrix} r_1(\boldsymbol{p}(e)) \\ \vdots \\ r_{D-1}(\boldsymbol{p}(e)) \end{pmatrix}$ である. この $R(G, \boldsymbol{p})$ を剛性行列と呼び, $R(G, \boldsymbol{p})$ のランクが $6(|V| - 1)$ と等しい場合, そのフレームワークは剛であることが知られている [3].

2.2　一般的なヒンジ配置の剛な Panel-Hinge フレームワークの組合せ的特徴付け

これまでは, すべてのヒンジ配置について剛性判定が可能な手法について述べてきた. 一方で, 剛性行列

のランク計算はその複雑さから, 構造物の部材数が多くなるにつれて困難となる．そのため, 一般的なヒンジ配置を前提とした組合せ的な特徴付けを用いる．ここで, 一般的なヒンジ配置の剛な panel-hinge フレームワークの組合せ的特徴付けとして, 以下の命題が知られている [3].

命題 1 (Katoh et al.) [3] *グラフ G の各辺を 5 本の多重辺で置き換えたグラフを $\widetilde{G}$ とする．$\widetilde{G}$ が 6 個の辺素な全域木をもつことは, G が $\mathbb{R}^3$ において一般的なヒンジ配置をとる剛な panel-hinge フレームワークとして実現可能であることの必要十分条件である．*

図 3(a) は図 2(c) の panel-hinge フレームワークに対応するグラフである．G を 5 重化したグラフ $\widetilde{G}$ には図 3(b) のように 6 つの辺素な全域木を詰込むことが可能であり, 命題 2 は 3 次元上に一般的なヒンジ配置をとる剛な panel-hinge フレームワーク $(G, \boldsymbol{p})$ を実現可能であることを示している．

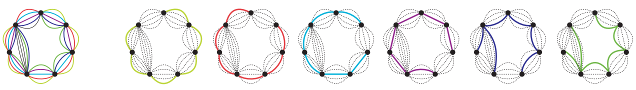


図 3　(a) 図 5(c) に相当する極小剛な panel-hinge グラフを 5 重化したグラフ, (b) (a) に詰込むことが可能な 6 つの辺素な全域木

この性質を利用して, [7] のペブルゲームアルゴリズムにより, panel-hinge グラフの剛性が $O(n^2)$ で判定可能である．

3　極小剛な Panel-Hinge グラフの演繹的な生成操作

頂点数 $n \geq 3$ の極小剛な panel-hinge グラフ $G = (V, E)$ を考える．$n = 3$ のグラフは三角形グラフである．このとき, より大きなグラフ $G' = (V', E')$ を生成する, 5 つの操作を以下のように定義する (図 4).

操作 1 (edge-split): ある辺 ab を選び, ab に新たに頂点 v を追加する．ただし, この操作は, 操作後のグラフが極小剛である場合にのみ実行する (図 4(1)).

操作 2 (edge-split plus 1-addition): $(D-1)|\delta_G(\mathcal{P})| = D(|\mathcal{P}|-1)$　を満たす V の頂点分割 $\mathcal{P}$ が存在する場合に, この操作を行う．ここで, $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ とする．ある辺 $ab \in \delta_G(\mathcal{P})$ に対して, 新たに頂点 v を追加する．$1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$ とし, $x \in V_i$, $y \in V_j$ となる頂点 $x, y \in V$ を見つけ, 辺 xy を $E \cup \{va, vb\} \backslash \{ab\}$ に追加してできるグラフ H が極小剛となる場合, 辺 xy を追加する (図 4(2)).

操作 3 (vertex 2-addition): 新たに頂点 v を追加し, 2 つの頂点 a, b を選択し, 辺 va, vb を加える．ただし, この操作は, 操作後のグラフが極小剛である場合にのみ実行する (図 4(3)).

操作 4 (triangle-addition): 任意の頂点 a を選び, 頂点 v_1, v_2 および辺 v_1a, v_1v_2, v_2a を加える (図 4(4)).

操作 5 (triangle-expansion): 任意の頂点 a を選ぶ．a が 次数 d をもつとする．a を三角形グラフ v, b, c で置き換えたグラフを G' とする．ここで b と c は少なくとも 1 つの a の隣接点と接続しており, v は b と c に隣接している．この操作は, 操作後のグラフが極小剛である場合にのみ実行する (図 4(5)).

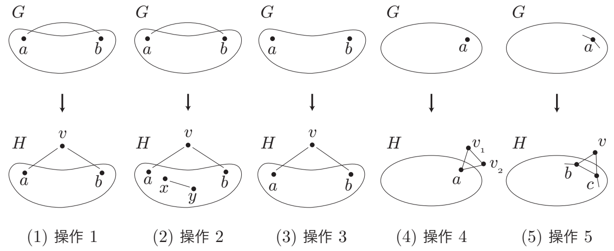


図 4　極小剛な Panel-Hinge グラフの演繹的な生成操作

本研究では, 以下の 2 つの定理を示した．

定理 2 極小剛な panel-hinge グラフ G が与えられたとき, 上記の 5 つの操作のうち少なくともひとつを適用することができ, 操作後にできるグラフもまた極小剛な panel-hinge グラフである．このとき, いずれの操作も多項式時間で実行可能である．

定理 3 三角形グラフから始まる, 5 つの操作の操作列を施すことによって, 任意の単純グラフである極小剛な panel-hinge グラフ G を得ることができる．

4　形態生成

xy, yz, zx 平面のいずれか 1 つに対して平行で, 面の端にヒンジを設けるという制約で形態生成を行った．その際, 3D CAD ソフトの Rhinoceros 及びスクリプト言語の Python を利用した．1 枚のパネルに対して 2 枚のパネル, 3 枚のパネルを追加する操作とその実行例を示す．両者の操作について, パネル追加操作により得られるフレームワークは常に剛となることを証明している．

4.1　2 枚のパネルを追加する操作

図 5 に 2 枚のパネルを追加する操作の生成順序を示す．パネルを選択し, 選択したパネルに対して垂直に, 互いにヒンジによってつながれた 2 枚のパネルを 1 枚のパネルに対して追加する．この操作は, 操作 4

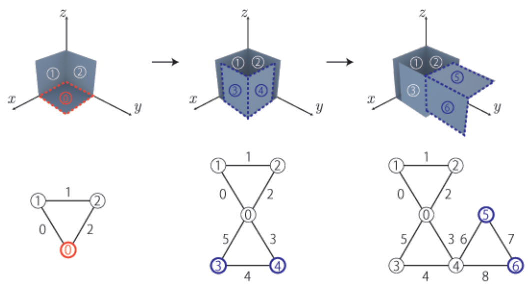


図 5　2 枚のパネルを追加する操作の生成順序

の triangle-addition に相当する操作である．詳細は省略するが追加する前のフレームワークが極小剛であるならば，この 2 枚のパネル追加によって得られる新しい panel-hinge フレームワークが常に極小剛であることが保証される．図 6 にこの操作を繰り返し実行した例を示す．

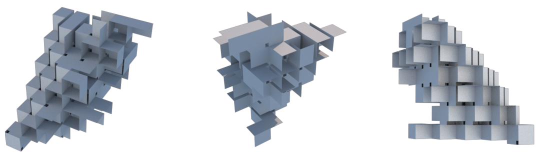


図 6　2 枚のパネルを追加する操作の実行例

4.2　3 枚のパネルを追加する操作

図 7 に 3 枚のパネルを追加する操作の生成順序を示す．パネルを選択し，そのパネルに対して互いに直交な 2 面を接続するか，または平行な 2 面を接続するように，3 枚のパネルを追加する．詳細は省略するが，追加する前のフレームワークが極小剛であるならば，この 3 枚のパネル追加によって得られる新しい panel-hinge フレームワークが常に極小剛であることが保証される．

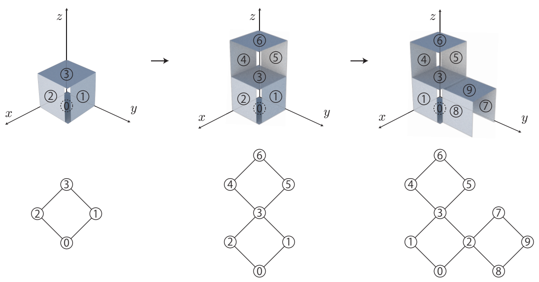


図 7　3 枚のパネルを追加する操作の生成順序

図 8 にこの操作を繰り返し実行した例を示す．

5　本研究の成果

[2] で開発した操作に基づき，直交する 3 種類のパネルによる極小剛なフレームワーク生成を提案し，生成手法を開発した．このとき，提案するパネル追加操作により得られるフレームワークは常に剛となることを証明している．この生成手法を用いて形態生成を行い，形態デザインへの応用の可能性を示した．

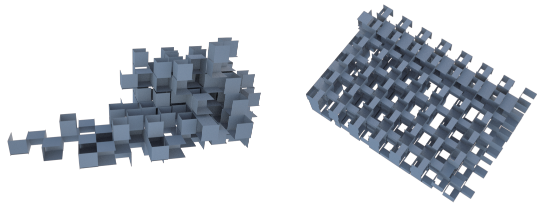


図 8　3 枚のパネルを追加する操作の実行例

謝辞：　本研究室博士課程の東川雄哉さんに多くのご助言頂いたことを深謝する．

[参考文献]

1) Henneberg, L.: Die graphische statik der starren system. Leipzig, 1911.
2) Higashikawa, Y., Katoh, N. and Kobayashi, Y.: An Inductive Construction of Minimally Rigid Body-Hinge Simple Graphs. *COCOA 2013*, 2013.
3) Katoh, N. and Tanigawa, S.: A proof of the molecular conjecture. *Discrete Comput Geom*, Vol. 45, pp. 647–700, 2011.
4) Laman, G.: On graphs and rigidity of plane skeltal structures. *Jounal of Engineering Mathematics*, Vol. 4, No. 4, pp. 331–340, 1970.
5) Lang, R.J.: Origami Design Secrets. *Mathematical Methods for an Ancient Art*, AK Peters, 2003.
6) Lang, R.J.: TreeMaker, 2006. `http://www.langorigami.com/science/treemaker/treemaker5.php4`.
7) Lee, A., Streinu, I.: Pebble game algorithms and sparse graphs. *Discrete Mathematics*, **308**(8), 1425–1437, 2008.
8) Tanigawa, S.: 構造物の組合せ剛性:計数条件とグラフ分割. *Proceedings of the Twenty-Second RAMP Symposium*, pp. 31–48, 2010.
9) Tay, T.: Rigidity of multi-graphs.i:linking rigid bodies in n-space. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 36, No. 1, pp. 95–112, 1984.
10) Tay, T.: Linking $(n-2)$-dimentional panels in n-space ii:$(n-2,2)$-frameworks and body and hinge structures. *Graphs and Combinatrics*, Vol. 5, No. 1, pp. 245–273, 1989.
11) Uno, T.: A new approach for speeding up enumeration algorithms and its application for matroid bases. *COCOON 1999*, pp. 349–359, 1999.
12) Whiteley, W.: The union of matroids and the rigidity of frameworks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 1, No. 2, pp. 237–255, 1988.
13) Whiteley, W.: Some matroids from discrete applied geometry. *Contemporary Mathematics*, Vol. 197, pp. 171–311, 1996.
14) Whiteley, W.: Rigidity of molecular structures: generic and geometric analysis. *Rigidity theory and applications, M.F. Thorpe and P.M. Duxbury*, pp. 21–46, 1999
15) 日本建築学会編: アルゴリズミック・デザイン 建築・都市の新しい設計手法. 鹿島出版会, 2009.

*1 京都大学大学院工学研究科　博士課程
*2 京都大学工学部　4 回生
*3 京都大学大学院工学研究科　教授　工博
*4 大阪市立大学大学院工学研究科　准教授　博士(工)