構造最適化問題における粒子群最適化法の探索性能について
－ホモロガス構造への応用－

○曽我部　博之*

キーワード：粒子群最適化　構造最適化　ホモロガス構造　トラス構造

1. はじめに

粒子群最適化（PSO：Particle Swarm Optimization）[1, 2]法は，鳥や魚などの群れによる採餌行動を応用したヒューリスティックな最適化手法の一つで，群れ全体とそれを構成する粒子の情報から最適解を求めようとするものである。この最適化手法の特徴は，アルゴリズムが非常に単純で目的関数の勾配情報が不要であること，さらにPSO法で用いられるパラメータの調整が比較的容易であることなどが挙げられる。

本報では，はじめに多峰性の目的関数を用いてPSO法のパラメータが最適解の探索性能に及ぼす影響について検討し，次に PSO 法を適用したホモロガス構造の創生問題について述べる。

2. 粒子群最適化法

2.1 計算手順

PSO法の基本的なアルゴリズムについて述べる。群れを構成する粒子 i は，ステップ k における位置ベクトル $\boldsymbol{u}^i(k)$ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}^i(k)$, そして評価値情報 $E^i(k)$ を持つものとする。各粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{u}^i(k)$と速度ベクトル $\boldsymbol{v}^i(k)$ は，次に示す漸化式を用いて更新する。

$$\boldsymbol{v}^i(k+1) = w\boldsymbol{v}^i(k) + c_1 r_1\left(\boldsymbol{p}^i(k) - \boldsymbol{u}^i(k)\right) + c_2 r_2\left(\boldsymbol{g}(k) - \boldsymbol{u}^i(k)\right) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}^i(k+1) = \boldsymbol{v}^i(k+1) + \boldsymbol{u}^i(k) \tag{2}$$

ここで，ベクトル $\boldsymbol{p}^i(k)$ はステップ k 迄における粒子 i 自身の最良解を示し，$\boldsymbol{g}(k)$ は同ステップ迄における群れの中の最良解を示している。ここで，最良解とは評価値の最も高い粒子に対する位置ベクトルのことである。w, c_1, c_2 は各項の重みを表すパラメータで，r_1 と r_2 は，区間[0,1]の一様乱数である。さらに，位置ベクトルと速度ベクトルの初期値も同区間の一様乱数によって与えるものとする。

各粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{u}^i(k)$ は，最適化問題の標準化設計変数ベクトル $\boldsymbol{z}$（設計変数の上下限値を[0,1]に調整したもの）に相当し，評価値 $E^i(k)$ は目的関数 $\boldsymbol{f(z)}$ に相当している。漸化式(1)及び(2)を繰り返し適用することによって，位置ベクトルと速度ベクトルが収束し，最適解が求められる。最終ステップにおける $\boldsymbol{g}(k)$ が最適解となり，このときの評価値 $E^i(k)$ が目的関数の値となる。

なお，漸化式(1)及び(2)によって求められたステップ(k+1)の位置ベクトルが，その定義域（$\boldsymbol{u}^i_{min} \leqq \boldsymbol{u}^i(k+1) \leqq \boldsymbol{u}^i_{max}$）を超えた場合には，位置ベクトル $\boldsymbol{u}^i(k+1)$にその限界値 $\boldsymbol{u}^i_{max}$を与え，速度ベクトル $\boldsymbol{v}^i(k+1)$には，漸化式(2)で再計算されたものを与える。

2.2 パラメータの検討

次式(3)で示される単純な目的関数を用いて，PSO法のパラメータが最適解の探索性能に与える影響について検討する。

$$\text{minimize} \quad f(x_i) = 10n + \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 10\cos\frac{2\pi x_i}{\gamma}\right) \tag{3}$$

$$\text{subject to} \quad -5.12 \le x_i \le 5.12 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

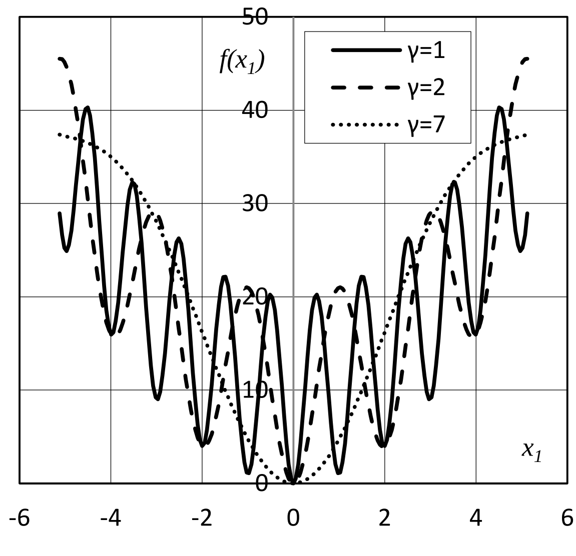


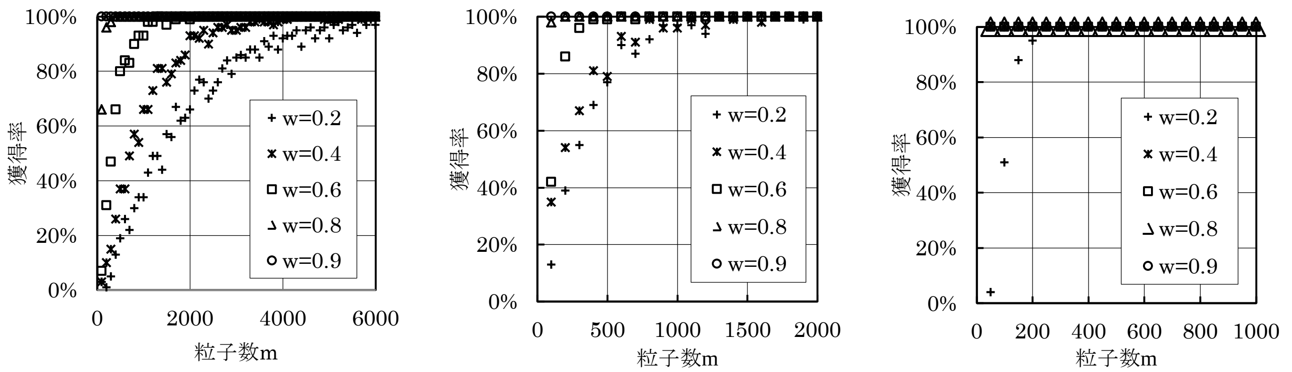
図 1 目的関数(n=1 の場合)

ここで，γ は多峰性関数における峰または谷の数を調整するパラメータで，ここでは $\gamma=1$，2，7 とした。この場合，谷の数はそれぞれ，11 個，5 個，1 個となる。参考までに次元 n=1 における目的関数を図 1 に示す。$\gamma=1$ の場合は，ベンチマーク問題で良く利用されている Rastrigin 関数となる。

設計変数 x_i は，次のような標準化設計変数 z_i に変換して，PSO 法を適用した。

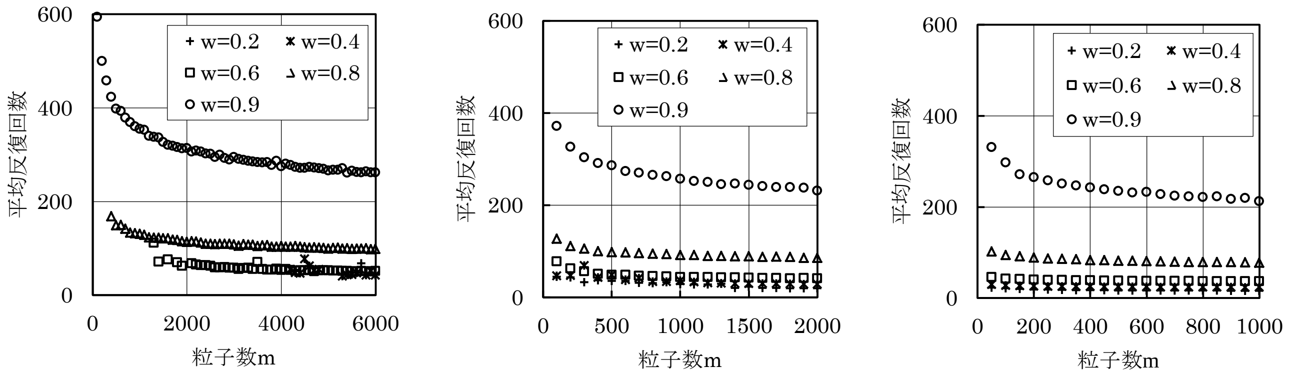
$$z_i = \frac{x_i + 5.12}{2 \times 5.12} \tag{4}$$

PSO 法の探索性能は，モンテカルロシミュレーション（試行回数 100 回）を実施することによって検討した。はじめに次元 n=5 として，重みパラメータ w(≦1)の影響について述べる。その他の重みパラメータは $c_1=c_2=1.0$ とし，漸化式(1),(2)の反復回数 k の最大値を k_{max}＝20000 回とした。図 2 は，目的関数 $f≦1.0^{-7}$ となる解が，最大反復回数 k_{max} 以内に得られる確率，すなわち最適解が得られる確率（獲得率）を粒子数に対して示したものである。図 3 は，最適解が得られたときの反復回数の平均値 k_{ave} を粒子数に対して示したものである。但し，ここでは獲得率が 100%となった場合



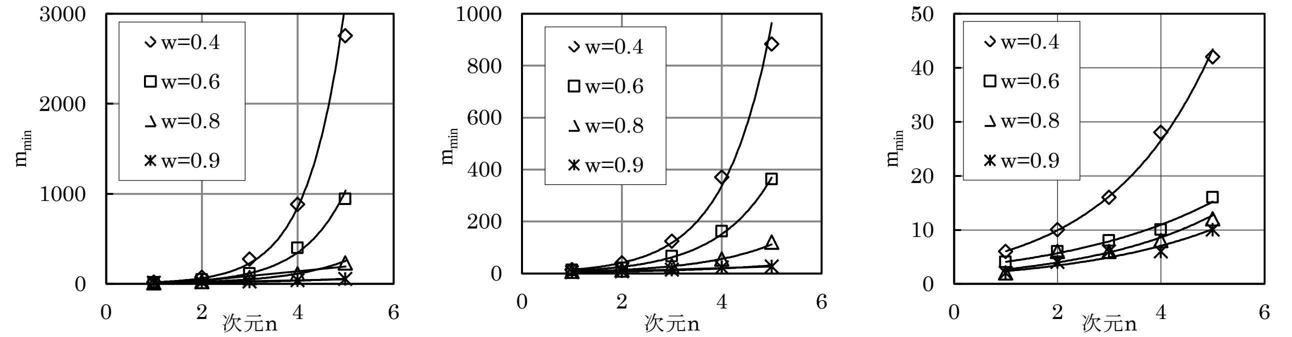
(a) γ=1　(b) γ=2　(c) γ=7

図 2　最適解の獲得率(c_i=1.0)



(a) γ=1　(b) γ=2　(c) γ=7

図 3　平均反復回数(c_i=1.0)



(a) γ=1　(b) γ=2　(c) γ=7

図 4　次元 n に対する最小粒子数(c_i=1.0)

のみをプロットしている。多峰性（γが小さい場合）が強い目的関数の場合，重みパラメータ w を大きくすることによって，少ない粒子数 m で最適解の獲得率を高くすることができる。多峰性が弱い場合には（γが大きい場合），粒子数が数百程度あれば，重みパラメータ w の影響をあまり受けずに最適解の獲得率が高くなっている。これより単峰性の強い場合には，反復回数を少なくするためにパラメータ w を小さく設定すればよいことがわかる。PSO 法を構造最適化問題に適用する場合，目的関数の計算において構造物の応力や変形を求める順解析（構造計算）を行うことから，漸化式の反復回数を少なくすることは，非常に有益である。

図 4 は，最適解を得るために必要な粒子数を設計変数の個数（次元 n）に対して調べたものである。重みパラメータ $c_1=c_2=1.0$ として，最適解の得られる確率が 100%となる最小の粒子数 m_{min} をモンテカルロシミュレーションによって求めた。次元 n が大きくなるのにしたがい最小粒子数 m_{min} が指数関数的に増えていくことがわかる。なお，重みパラメータ w を大きくとることによって，最小粒子数は少なく抑えることができるが，反復回数は逆に多く必要になる。また，目的関数の形状が多峰性になるほど，粒子数 m も多く必要になることがわかる。

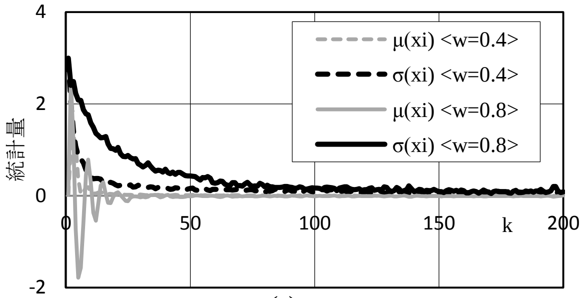
図 5 は粒子群の探索過程を示したもので，設計変数 x_i (i=1~5) の平均値 $\mu(x_i)$とその標準偏差 $\sigma(x_i)$の推移を示したものである。目的関数は多峰性関数（γ=1）で，次元 n=5，粒子数 m=500，$c_1=c_2=1.0$ とした。重みパラメータ w が大きいとばらつきが大きくなり，平均値も大きく変動している。大きな w の場合，大域的な解の探索が長く維持され，解の探索精度が高くなっている。

3. ホモロガス構造への応用

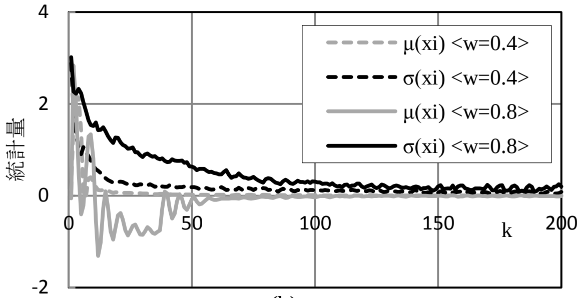
3.1 最適化問題の定式化

構造最適化問題の例として，ここでは各部材の断面積及び弾性係数が一定であるトラス構造物のホモロガス変形 [3,4] について考える。ホモロガス変形とは，変形前後の構造形状が指定した形状になる変形のことである。図 6 に示すトラス下弦材の鉛直位置を調整することによって，上弦材における全ての鉛直変位が同じになるようにする。下弦材の鉛直位置を設計変数 z_i (i=1,2)にして，上弦材の鉛直変位を y_j(j=1,2,3)にすると，この最適化問題は次のように定式化できる。

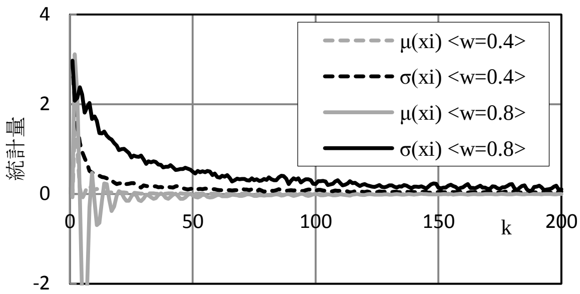
$$\text{minimize} \quad f(z_1, z_2) = \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_2^2} + \frac{(y_2 - y_3)^2}{y_3^2} + \frac{(y_3 - y_1)^2}{y_1^2} \qquad (5)$$



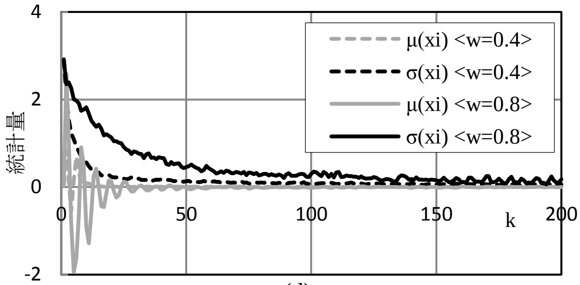
(a) x_1



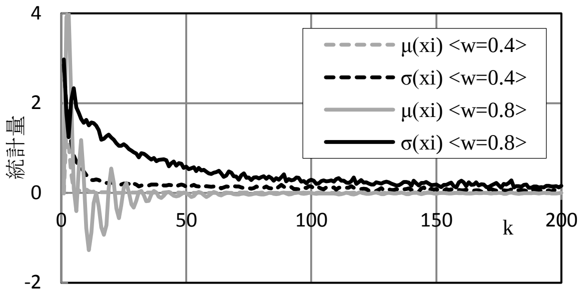
(b) x_2



(c) x_3



(d) x_4



(e) x_5

図 5　粒子群の探索過程（c_i=1.0）

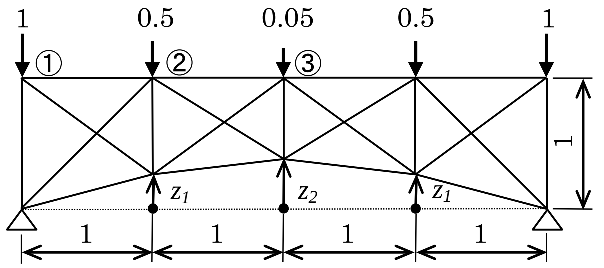


図6　トラス構造モデル

$$0 \le z_i \le 1 \quad (i = 1, 2) \tag{6}$$

目的関数(5)における上弦材の鉛直変位 $y_j(z_i)$ は，PSO 法の漸化式で得られた設計変数（位置ベクトル）をトラス下弦材の節点座標として与えて，マトリックス法によって求めることができる。

3.2 計算結果

図7はこの最適化問題の設計空間を図示したもので，図中の*は最適解の位置を示している。この問題では，標準化した設計変数 z_i の大きな領域において急峻な山が現れているが，比較的単純な設計空間になっている。粒子数 m=100，重みパラメータ w=0.9，$c_1=c_2=1.0$ として PSO 法を適用した結果について述べる。図8は，漸化式の反復回数に対する設計変数と目的関数の推移を示したものである。設計変数の個数が2つと少ないことから30回程度の反復回数で表1に示すような最適解が得られた。このときのホモロガス構造のトラス形状を図9に示す。

4. おわりに

本報は，多峰性の目的関数を有する最適化問題に粒子群最適化法を適用し，その探索性能の有効性について検証した。さらに，構造物の最適化問題の一つであるホモロガス構造の創生問題に対して本手法を適用し，その有効性を示した。

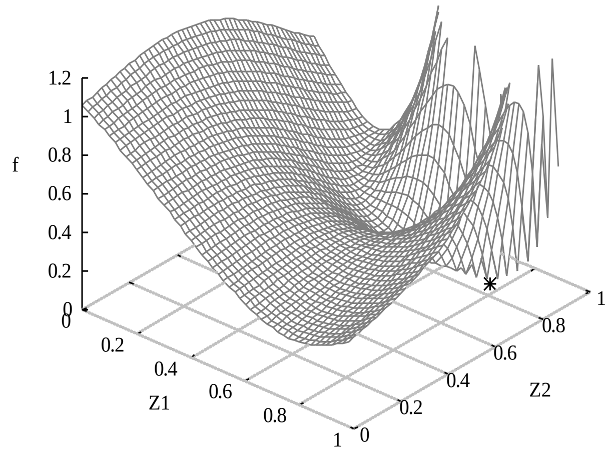


図7　設計空間

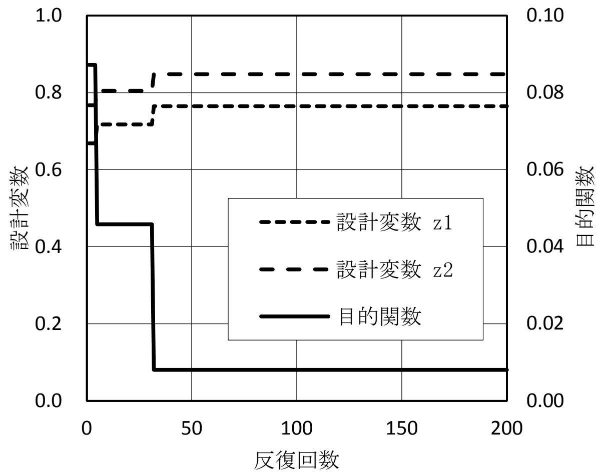


図8　設計変数，目的関数の推移

表1　計算結果

節点位置		目的関数 f	垂直変位		
z_1	z_2		v_1	v_2	v_3
0.765	0.848	8.00E-03	-1.00	-1.00	-1.01

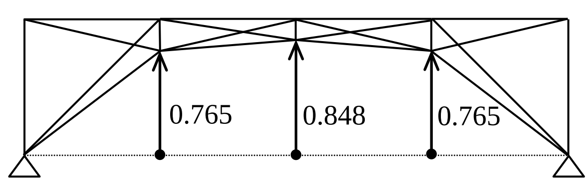


図9　ホモロガス構造

[参考文献]

1) J.Kennedy, R.C.Eberhart : Particle Swarm Optimization, IEEE International Conf. on Neural Networks, pp.1942- 1948, 1995.

2)相吉英太郎，安田恵一郎編著：メタヒューリスティクスと応用，電気学会，2007.

3)尾田十八，松本徳之，王安麟：GA によるホモロガス構造の創生，日本機械学会論文集(A 編)，59 巻 568 号，pp248-253，1993.

4)三井和男，登坂宣好：遺伝的アルゴリズムの空間構造形態解析への応用，日本建築学会構造系論文集，第 484 号，pp.75-83，1996.

5)曽我部博之 : PSO 法を用いた弾塑性地震応答における降伏せん断力の最適化，第 35 回情報・システム・利用・技術シンポジウム，pp.393-396，2012.

*　　愛知工業大学建築学科　教授　工博