剛体折紙の形態創生

○舘　知宏*[1]

キーワード：展開構造　形態創生　折紙　剛体折紙　計算折紙　コンピュテーショナル・デザイン

１．折紙とは

折紙は ORIGAMI として国際的に認知され，数学，科学，工学，歴史，教育などの領域をまたぐホットな研究テーマである。折りのコンセプトを空間構造や展開構造物として用いる提案自体は 1960 年代以降盛んになっており，新しいものではないが，近年は特に,「計算折紙」と呼ばれる折紙の幾何学とアルゴリズムの研究の発展とともに，その可能性が幅広く研究され，構造物への応用可能性も広がっている。講演者は，そういった折紙の形態バリエーションを探索し，設計可能とする計算手法およびデザインシステムを提案してきた。これらを概説し，デザイン可能な形態バリエーションや実験モデルを紹介する。

ところで「折紙」の定義は，応用されるべき用途に応じて異なるのが自然である。ここでは「折紙」と「剛体折紙」という言葉で，それぞれ可展面としての折紙と連続変形する機構としての折紙を区別する。２節では前者を，３節では後者に関して述べる。

２．折紙の形態創生とインタラクティブ・デザイン

「折紙」は平面領域の等長埋め込み，すなわち可展面である。可展面は微分可能な範囲においては単曲面を形作るが，折紙では微分不可能な「折り」が許される。折紙では必ずしも「可展面＝単曲面」とはならず，鞍型やドーム状の形状が近似的に作れる(図１)。一枚のシート材が面内変形なしで加工されて作りうる形であるから，硬くて薄いシート材の成形に応用しうる。特に面に繰り返しの折りパターン（折紙テセレーション）を施すことで多様な立体形状を近似的に実現できる。Resch による折り構造 [1)]は折紙テセレーションの例であり，正曲率の曲面を作る。

与えたパターンを折ることで立体形状が作られるのであれば，逆に任意に与えた立体形状を実現するためのパターンを導くことができるであろうか？この問いを折紙の設計問題といい，計算折紙の究極の問題の一つである。この問いの答えは,「理論的には任意の多面体が折紙で実現可能」である。オリガマイザ [2)]はこの問題に対する解答を与えるソフトウェアシステムである(図２)。多面体を構成する面と面の間にヒダ構造を挿入し，そのヒダの大きさを調整することで，一枚の紙から折れるようにする。ただし，厳密に多面体にフィットするように，180°ぴったり折り重なることや，紙の厚さを無視して重なった状態でさらに折り畳むことを許す必要があり，紙以外の材料では実現が難しく，たとえば金属板の加工に用いる事はできない。

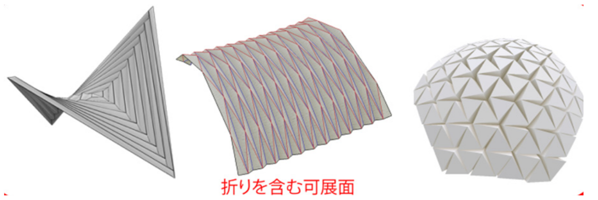

図 1．左から折りによる負曲率近似（Triangulated Hypar)，零曲率(Yoshimura Pattern)，正曲率曲面近似(Resch Pattern)

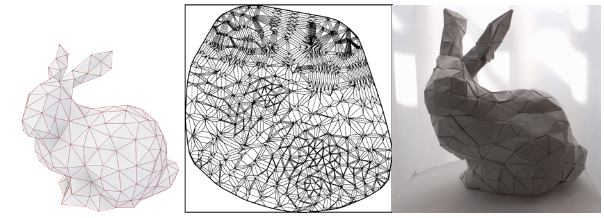

図２．オリガマイザ。左から，入力多面体，出力展開図，展開図を折ったもの（折り時間 10 時間）

厳密性と折りの余裕はトレードオフの関係にある。そこで，近似的に形状を実現しながら，180°の折りを避けて余裕のある折紙テセレーションを作成することができる [3)]。多面体の構成面をばらばらにして，その間に立体的なヒダを挿入した多面体メッシュを構築する(図 3)。このままでは一枚の紙から作れないため，各頂点が可展性の幾何条件を満たすように形状を修正する。V 個の頂点座標 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_V$ あるいはこれを縦につなげた$3V$行の列ベクトル$\mathbf{X}$が形状を表す変数であり，そこに幾何拘束が加わる。可展性の幾何拘束はV_{in}個の内部頂点それぞれvについて，

$$G_v = 2\pi - \sum_{i=1} \theta_i = 0 \tag{1}$$

と表現される。ただしθ_iはvに接続するi番目の面の頂角である。面のねじれを回避して正しい多面体が構成されるためには，一度三角形分割して，折り線以外の稜線e(E_{trig}本)における折り角（二面角の補角）に対して，

$$P_e = \rho_e = 0 \tag{2}$$

が成立しなくてはならない。変数$3V$個に対して拘束は$V_{in}\ (< V) + E_{trig}$個であり，他に折り角の限界角度，衝突回避，頂点角の限界角度のためのペナルティ関数，設計上必要となる頂点位置の条件などを加えても，十分な自由度を残し多次元の解空間を作る。この幾何拘束下で最初の入力形状からの頂点距離の二乗和を最小化することで初期解

が得られる。一枚のシートから折れる自由形状の折紙を設計しその展開図が得られる(図 4)。図 5 は，厚さ 0.5mm，幅・長さ 900mm 程度のステンレスシートに，レーザー加工機で折りパターンに沿ってミシン目様の加工を施し，その後手作業で折ったものである。二面角が 18°を下回らないように設計されており，厚みのある板でも問題なく加工でき，加工時間も 1 時間程度の比較的短時間で折ることができた。

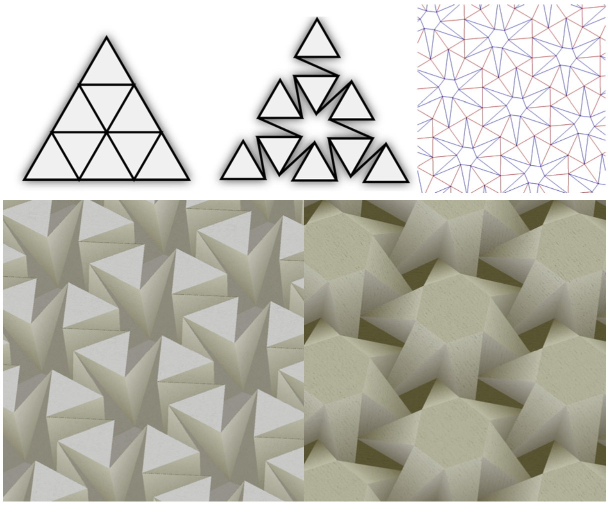

図３．多面体への立体ヒダ構造の挿入

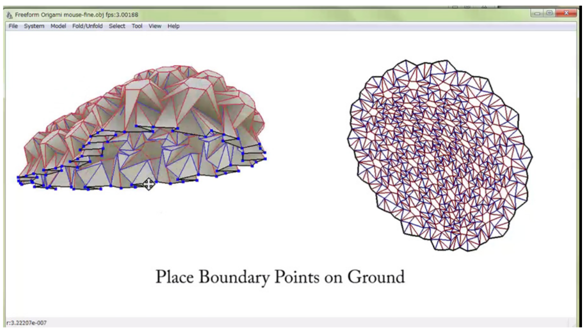

図４：デザインシステム。左が幾何条件を満たすよう生成された折紙形状，右がその展開図。平坦な面上に設置するため，シートの輪郭部(青)を水平面状に固定する幾何拘束を加えてある。

図５：ステンレスシートの折り曲げによる自由形状

先述の通り，可展条件および幾何条件そのものから得られる解は，入力形状からの距離にこだわらなければ無数に存在する。この多次元の解空間に沿って形状探索を行い，形状のバリエーションをインタラクティブに得ることができる。まず，既に得られた解（あるいは既に折れることが知られているパターン）を初期値として，微少変形を繰り返すことで，自由な変形パターンを得る。これは，一般逆行列を用いた不安定機構の形態解析と同様のアプローチである。デザインシステム上でタッチパネルで形状をドラッグするなどしたユーザ入力は頂点座標の初期微少変形として$\Delta\mathbf{X} = \left[\Delta\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}, \Delta\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}}, \ldots, \Delta\mathbf{x}_V^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$と変換する。この微少変形のモードを解空間の接空間（一次近似）へ直投影することで，接空間上でオリジナルの変形に最も近い妥当な変形$\Delta\mathbf{X}^*$を得る。この投影は，数式(1)を含むアクティブな拘束条件を縦に並べて$N\ (\geq V_{in} + E_{trig})$行の列ベクトル等式$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$としたときの横長（$N \times 3V$）のヤコビ行列$\mathbf{J} = \partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{X}$とそのムーア・ペンローズ一般逆行列$\mathbf{J}^+$を用いて，

$$\Delta\mathbf{X}^* = (\mathbf{I}_N - \mathbf{J}^+\mathbf{J})\Delta\mathbf{X} \tag{3}$$

と表せる。このような微少変形を使い，$\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}^*$と更新し，一回ごとにヤコビ行列を更新し，ニュートン・ラプソン法による残差消去を施すことで解のバリエーションが得られる。上記のアルゴリズムを実装して多面体からパターン生成，パターンの自由形状変形をインタラクティブに行うシステムは，*Freeform Origami* として，ウェブページ[1]で無償公開している。

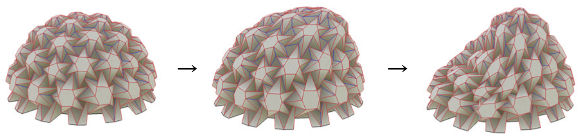

図 6:得られた形状の自由変形。一般逆行列を用いた解法には共役勾配法を用いている。上記は 631 頂点のモデルで，5〜10fps 程度

３．剛体折紙の形態創生

剛体折紙は，折紙の変形プロセスを機構として表現するモデルで，折紙の面を変形しない剛体パネル，折り線をヒンジとして表す。実際の材料では面の曲げや捩れ，折り線の移動が伴うが，これを無いものとする。このモデルで機構が存在すれば「剛体可折」と呼ぶ。剛体可折なパターンは要素の変形に頼らずに全体の形状の変形を得られるので，厚みのあるパネルでの製作に適しており，折紙を比較的大きなスケールの可動構造・展開・折り畳み構造システムに応用可能性がある。

剛体折紙の機構の自由度を考える。折り線における折り角を変数で全体形状を表すことができる。この変数は，任意に定めることはできない。複数の折り線が一点に集中し

[1] http://www.tsg.ne.jp/TT/software/

て囲む各内部頂点は球面リンケージを構成し，回転を拘束するから，すべての折り角が 0°か 180°の特異な状態でなければ，3 個の拘束条件を与える。それゆえこの機構の自由度は，通常

$$DOF = E_{in} - 3V_{in} \tag{4}$$

と表せる。ここでE_{in}は折り線の数である。四角形の面を二つの三角形とすると，1 本の折り線を加えて自由度を 1 上げることができるので，すべての面を三角形としたメッシュが最も高い自由度を持つ。三角形メッシュの自由度はオイラーの多面体公式と式(4)から，境界上の頂点数V_{out}を用いて$DOF = V_{out} - 3$となる。これは境界部分の自由度が形状全体の自由度に寄与する事を示唆している。たとえば境界のない閉じた多面体では，通常は自由度を持たず，剛となる。これには例外もあり，Connelly の提案した，閉じた多面体は剛体可折である。この設計には，対称性が重要な役割を果たし，また変形中に体積が変化しないという特別な性質がある（ふいご定理 [4]）。三角形メッシュを境界条件によって形状コントロールすることも可能である。たとえば図 7 は風船の基本形の充填パターンのバリエーションと真空膜構造を組み合わせて，アダプティブな空間を作る提案である。

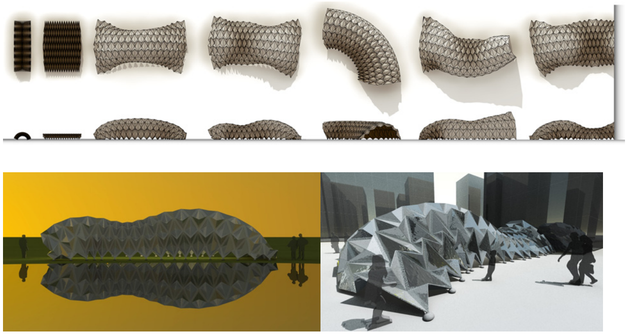

図 7: 三角形メッシュ剛体折紙によるアダプティブ空間の提案 [5]

四角形メッシュの折紙の挙動は，三角形メッシュとは大分異なる。たとえば代表例の$n \times n$のミウラ折りでは，拘束数を単純に数えると，$DOF = -(n-1)(n-3)$となる。$n = 2$のときのみ単頂点の一自由度機構となり，他では$DOF \leq 0$となってしまう。それぞれの頂点が一自由度であるので，それを縦横に並行して複合させると過拘束となって，通常では動かない。

しかし，実際にはどんなnにおいてもミウラ折りは一自由度機構である。これは，すべての頂点が同一である対称性によって，拘束が冗長となるからである。四角形パネル剛体折紙は基本的に過拘束メカニズムであって，これを設計するためには，対称性による機構の冗長性の設計が不可欠といえる。自明な対称性を含まないおもしろい対称性として，(a)各頂点の頂角における対角の和が180°となること，(b)三次元空間上に折り角0°あるいは180°以外の解が一つ存在することが成立すると，機構の冗長性が折りのプロセスすべてにおいて成立するというものが発見されている [6]。これを用いると，動きの存在の問題を(a)(b)を満たす形の存在の問題に置き換えて解くことが可能である。すなわち，各頂点において

$$F_v = \sum_{i=1} (-1)^i \theta_i = 0 \tag{5}$$

を加えると(1)(5)によって (a)が成立する。さらに(2)で四角形の平面性を保つ幾何条件を加える。頂点座標$\mathbf{X}$の関数 $\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \left[G_1, \dots, G_{V_{in}}, F_1, \dots, F_{V_{in}}, P_1, \dots, P_{E_{trig}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ を解くとやはり多自由度の解空間を構築する。式(3)と同様に解けば，機構を持つミウラ折りの一般化形態バリエーションがインタラクティブに探索可能となる（図 9,10）。このようにして得られる剛体折紙構造は厚板で構築することができる(図 11)。逆に，四角形面は薄板では捻れを生じるため，設計通りの一自由度機構を実現するには板の剛性を上げるのが望ましい。

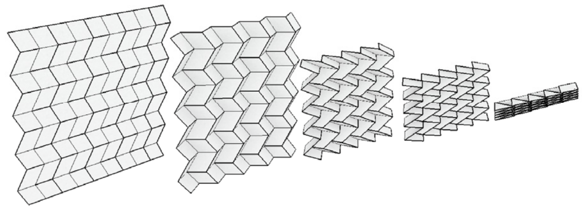

図 8: ミウラ折りの機構。過拘束だが，一自由度機構となる。

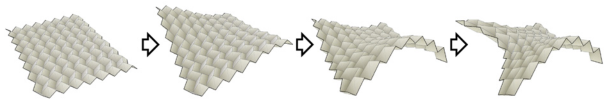

図 9: 剛体可折性を保った，ミウラ折りの一般化。それぞれの形状が機構となる。

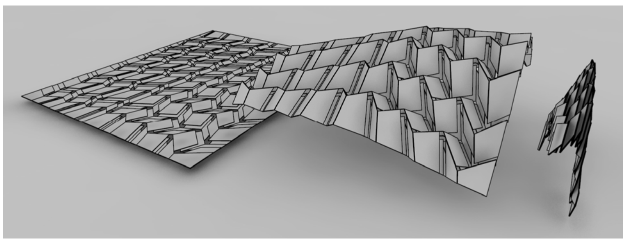

図 10: 一般化ミウラ折りの折り畳みプロセス。

図 11: 厚みのある材料で作られた一自由度剛体折紙テーブル

4．剛性と柔軟性の両立

対称性を用いた拘束の冗長性に注意して設計すると，ディスク以外でも過拘束剛体折紙が構築可能である [6]。筒型構造とそれらを組み合わせたセル型構造が作れる（図 11）。ディスクを筒状に閉じると 6 個拘束が増え，さらに筒を並列に束ねると筒で囲まれるリブごとに 3 個拘束が増えるため，セル状構造の拘束の冗長性は高くなる。この拘束の

多少は折紙構造を複合材料として扱うときの材料の硬軟として現れる。

薄い材料で構造を作ると，その挙動は，面内剛性が支配的となり，(パネルの曲げを許さない) 剛体折紙の挙動よりは，構成面を三角形分割してパネルの曲げを許したときのものに近い。ディスク単体だと，三角形分割によって前述の通り自由度が得られるため，たとえばミウラ折りは簡単にねじることができる（図 12）。一方，セル型の剛体折紙構造では，三角形分割をしても過分な自由度が発生しないため，決められた一自由度機構以外の変形に対しては剛であり続ける。

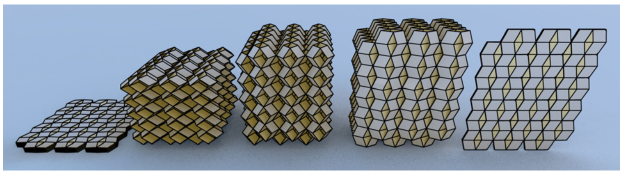

図 11：一自由度機構を構築する剛体可折性のあるセル型構造

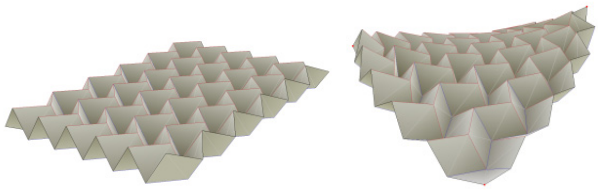

図 12：ミウラ折りの自然な捻れ変形

この剛性と柔軟性の両立によって，折紙を用いた展開構造物の応用の幅が広がる。ディスクの剛体折紙では厚板を用いる必要があったが，ボリュームの干渉により折り畳みの性能に制限を受けていた。これを折り畳める複合材とすることで，その剛性を担保しつつも，体積変化の割合を大幅に改善できる。図 13 は，空間曲線に基づき剛体折り可能な曲線折り筒型構造を構築し，それらをセル状に組み合わせたものである。ミウラ折りの一般化を拡張して曲線折りに適用することで，機構の冗長性を保証している。図 14 の実装では，$200g/m^2$ほどの不織布を用いている。平坦に畳むとフレキシブルになり，巻き取って保管が可能であるが，広げると筒状のアーチが複合することで自立する。

５．まとめ

折紙の幾何拘束を保った形態創生手法と拘束より高い変数をインタラクティブに扱うデザインシステムを紹介した。また折紙の変形問題を剛体折紙の機構の存在問題として，これを形態の満たすべき幾何条件に置き換えることで解く手法を提案した。最後に，過拘束の剛体可折構造の拘束の冗長性を上げることで構造の剛性と変形の柔軟性が成立する仕組みを作り，展開構造物への応用可能性について述べた。剛体折紙は，未解決の問題や新しい問題が多く，今後も理論的研究発展とその展開構造物への応用が期待される分野である。

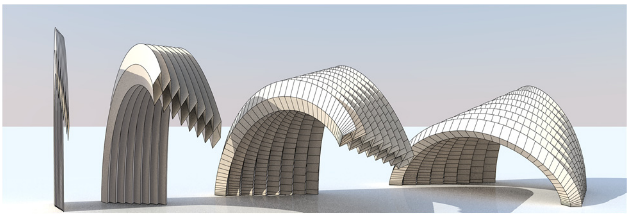

図 13：剛体可折曲線折り筒型構造による複合構造

図 14：剛体可折曲線折り筒型構造による複合構造

[参考文献]

1) Resch, R. D., 1968. Self-supporting structural unit having a series of repetitious geometrical modules. United States Patent No. 3,407,5584
2) Tachi, T., 2010. “Origamizing polyhedral surfaces”. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 16(2), pp. 298-311.
3) Tachi, T., 2013, “Designing Freeform Origami Tessellations by Generalizing Resch's Patterns”
4) Connelly, R., Sabitov, I. and Walz, A., 1997. “The Bellows Conjecture,” Contributions to Algebra and Geometry, 38(1), pp.1-10.
5) 岩元真明，舘知宏，増渕基，2011，『やわらかな剛体』，形態創生コンテスト 2011
6) Tachi, T., 2009, “Generalization of Rigid-Foldable Quadrilateral-Mesh Origami,” Journal of IASS, 50(3), pp. 173-179.
7) Tachi, T. and Miura, K., 2012, “Rigid-Foldable Cylinders and Cells” Journal of IASS, 53(4), pp. 217-226.

＊1　東京大学大学院総合文化研究科　助教　博士(工学)