

# 建築構造物のロバスト最適設計における局所探索法の終了条件

○谷口 悠盛\*<sup>1</sup> 大崎 純\*<sup>2</sup>  
山川 誠\*<sup>3</sup>

キーワード：不確定性 最適化 反最適化 順序統計量 ランダム探索 局所探索

## 1. 序

建築構造設計において、荷重や材料特性などのパラメータには不確定性が存在し、それらは安全率によって考慮される。しかし、パラメータのばらつきを表現する確率分布が不適切に定義されれば、静的あるいは動的荷重に対する応答を過小評価、あるいは過大評価する可能性がある。このような不確定性を考慮した設計法として、ロバスト最適設計が知られている[1-3]。

本研究では、最適設計の手法として、局所探索法を用いる。局所探索法で得られる解は初期解に強く依存するため、多スタート局所探索法が使われることが多く、解の精度は初期解の発生回数に依存する。そのため、解の精度を保証するための終了条件が必要である。

本研究では、地震外乱の作用する鋼構造骨組を対象として、順序統計量と局所探索を用いたロバスト最適設計法を提案する。下位の反最適化問題では、順序統計量によって最悪値の近似値を求める。部材断面を設計する上位の最適化問題では、局所探索法で局所最適解を求めて、近似精度を検討する方法を提案し検証する。

## 2. 2段階ロバスト最適化問題の定式化

部材断面積などの設計変数のベクトルを  $\mathbf{x}$ 、材料定数などの設計者が設定できないパラメータのベクトルを  $\Theta$  とする。また、 $\Theta$  が取り得る値の集合を  $\Omega$  とする。

部材体積などの目的関数を  $f(\mathbf{x})$ 、地震動などの外力に対する応答値の代表量を  $g(\mathbf{x})$ 、その上限値を  $\bar{g}$  として、最適化問題を以下のように定式化する。

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & g(\mathbf{x}, \Theta) \leq \bar{g} \\ & \text{for all } \Theta \in \Omega \end{array} \quad (1)$$

複数の応答量を考慮する場合には、それらの不満足度の最大値を用いればよい。式(1)の制約条件は、 $\mathbf{x}$  を指定して  $\Theta$  を  $\Omega$  内で変化させたときの最大（最悪）の値が上限値以下となることを意味する。したがって、上記の問題は、目的関数を最小化する上位の最適化問題と、応答の最悪値を求める下位の反最適化問題として、以下のように2段階の問題に書き換えることができる。

### 反最適化問題

$$\text{find } \left. \begin{array}{l} g_{\max}(\mathbf{x}) = \max_{\Theta \in \Omega} g(\mathbf{x}, \Theta) \end{array} \right\} \quad (2)$$

### 最適化問題

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize} \quad f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad g_{\max}(\mathbf{x}) \leq \bar{g} \end{array} \right\} \quad (3)$$

## 3. 順序統計量とランダム探索による近似解法

本節では、反最適化問題に対する順序統計量を用いた近似解法の概要を示す[4,5]。

式(2)において、設計変数  $\mathbf{x}$  を固定して、 $\Theta$  の変動に対する最悪値を求める。そのため、引数の  $\mathbf{x}$  を省略して表現を以下のように簡略化する。

$$g_{\max} = \max_{\Theta \in \Omega} g(\Theta) \quad (4)$$

式(4)に、単純ランダム探索(Pure Random Search, PRS)を適用することにより、最悪値の近似値を求める。得られた  $n$  個の標本値を  $\{Y_1 = g(\Theta_1), \dots, Y_n = g(\Theta_n)\}$  と表す。このとき  $Y_j$  は独立同一分布  $F_Y$  に従う確率変数となる。 $Y_1, \dots, Y_n$  を昇順に並び替えたもの  $Y_{1,n} \leq Y_{2,n} \leq \dots \leq Y_{n,n}$  と表し、式(6)において第  $k$  番目 ( $1 \leq k \leq n$ ) の確率変数(順序統計量)を  $Y_{k,n}$  とする。反最適化問題の制約を、 $Y_{k,n}$  を用いて以下のように近似する。

$$Y_{k,n} \leq \bar{g} \quad (5)$$

式(5)は  $n$  回の PRS によって得られた第  $k$  番目に小さい値が制約条件を満たすという意味である。

次に、式(5)を確率的に議論するためパラメータ  $\beta, \gamma$  を導入し以下のように書き直す。

$$\Pr\{F_Y(\bar{g}) \geq \gamma\} \geq \beta \quad (6)$$

式(6)は「確率変数  $Y$  の分布のうち  $100\gamma\%$  が  $\bar{g}$  以下になる確率は  $100\beta\%$  以上」という意味である。また、式(6)より  $k, n$  の選択はパラメータ  $\beta, \gamma$  を選択することと同じであることがわかる。

順序統計量を用いることにより、PRSの実行数  $n$ (停止条件)は、以下の最小化問題を解いて得ることができる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize} \quad n \\ \text{subject to} \quad 1 - I_\gamma(k, n - k + 1) \geq \beta \\ \quad \quad \quad 1 \leq k \leq n - \varepsilon \end{array} \right\} \quad (7)$$

ここで、 $I_\gamma$  は不完全ベータ関数、 $\varepsilon$  は最大値からの余裕度を定めるパラメータである。PRSを  $n$  回実行し、 $k$  番目に大きい値  $Y_{k,n}$  を応答最悪値の近似値とする。

#### 4. 局所最適解の数の予測と精度

上位の最適化問題は、多スタート局所探索法を用いて解く。多数のランダムな解を初期解とする離散変数の確定的局所探索(LS)の終了条件として、以下のような3つのルールを検討する。探索は確定的とし、初期解、遷移解と局所最適解が1対1に対応するものとする。

$t$ 回のLSで探索された局所解の数を $w$ とする。文献2によると、予測される局所解の数 $w_{est}$ は、次式で与えられる。

$$w_{est} = \frac{w(t-1)}{t-w-2} \quad (8)$$

**Rule1:**  $w_{est} - w \leq 0.5$ を満たしたとき探索を終了する。

確定的なLSによって局所最適解 $\mathbf{x}_i^*$ に収束する初期解の集合を **attractor** といい、そのサイズを $s_i$ とする。既探索の局所最適解の **attractor** のサイズを以下のいずれかで定義する。

- C-1: **attractor** 内の初期解の数
- C-2: **attractor** 内の初期解、遷移解、局所最適解の数の和

また、未探索の局所最適解の **attractor** のサイズは、以下のいずれかで仮定する。

- C-mean: すでに得られた $s_i$ の平均値
- C-min : すでに得られた $s_i$ の最小値

例として、C-1-meanとはC-1とC-meanを組み合わせた **attractor** の仮定とする。

$h$ 個の局所最適解が存在するとき、 $s_i$ を $s_1, \dots, s_h$ の総和で除した値を $c_i^{(h)}$ とする。局所最適解の総数 $h$ を仮定したとき、LSを $t$ 回実行後に特定の局所解 $\mathbf{x}_i^*$  ( $i=1, \dots, w$ )がそれぞれ $n_i$ 回探索される確率(尤度) $P_w^{(h)}$ は以下のように定式化できる。

$$P_w^{(h)} = C_{t,w} \prod_{i=1}^w (c_i^{(h)})^{n_i} \quad (n_1 + \dots + n_w = t) \quad (9)$$

ここで、 $C_{t,w}$ は $h$ と $c_i^{(h)}$ に依存しない係数である。局所最適解の総数が $h$ である確率が尤度に比例すると考えると、式(9)を用いて、次のような終了条件を定めることができる。

**Rule2:** 指定された $j$ に対して $P_w^{(w+j)} / P_w^{(w)}$ が十分に小さい値となったとき探索を終了する。

実際は $h$ 個の局所最適解が存在し、LSを $t$ 回実行後に $w$ 個の局所最適解しか見つからない確率(未探索の **attractor** が存在する確率)は以下のように定式化できる。

$$\bar{P}_w^{(h)} = \left(1 - c_{w+1}^{(h)}\right)^t \quad (10)$$

$c_i^{(h)}$ の仮定には(C-1 または C-2), (C-mean または C-min)を用いる

**Rule3:**  $\bar{P}_w^{(w+1)}$ が指定した値よりも小さい値となったとき、探索を終了する。

$h = w+1$ のときには以下の関係が成り立つ。

$$c_i^{(w+1)} = \frac{c_i^{(w)}}{1 + c_{w+1}^{(w)}} \quad (11)$$

したがって、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{P_w^{(w+1)}}{P_w^{(w)}} &= \prod_{i=1}^w \left[ \frac{(c_i^{(w+1)})^{n_i}}{(c_i^{(w)})^{n_i}} \right] \\ &= \left( \frac{1}{1 + c_{w+1}^{(w)}} \right)^t \\ &= \left(1 - c_{w+1}^{(w+1)}\right)^t \\ &= \bar{P}_w^{(w+1)} \end{aligned} \quad (12)$$

以上より、Rule3はRule2によって検証できることがわかるので、次節ではRule1とRule2について検証する。

#### 5. ロバスト最適設計例

##### 5.1 モデル概要

図1に示すような平面骨組モデルを対象とする。架構形式は純ラーメン鉄骨造である。柱はすべて同一断面C1とし、梁は図1に示す2, 3階の梁G1, 4, 5階の梁G2, 6, R階の梁G3の4つのグループに分けて、表1のように、それぞれ10種類の断面のリストから選択する。鋼材の応力ひずみ関係はバイリニア型とする。ヤング係数は $2.05 \times 10^5$  N/mm<sup>2</sup>, 硬化係数はヤング係数の0.01倍、降伏応力の公称値は、梁G1-3: 235 N/mm<sup>2</sup>, 柱C: 325 N/mm<sup>2</sup>とする。

解析には汎用構造解析ソフトウェアOpenSeesを用い、時刻歴応答解析を行う。各部材を1つの梁要素でモデル化し、部材両端に塑性ヒンジが発生可能とする。塑性ヒンジの長さは0.2 mである。入力地震動は限界耐力計算法で用いられる加速度応答スペクト(減衰定数0.05, 第2種地盤, 極稀に発生する地震動レベル)に適合する模擬地震動1波とする。加速度の時刻歴を図2に示す。

##### 5.2 設計問題

建物の平均変形角(屋根変位の高さに対する比)の最大値 $\phi_{max}$ が0.01以下とする制約条件の下で、部材体積 $V(\mathbf{x})$ を最小化する組合せ最適化問題:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize} \\ \text{subject to} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} f(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}, \Theta) = \phi_{max}(\mathbf{x}, \Theta) \leq 0.01 \\ x_i \in \{1, 2, \dots, 10\} \quad (i=1, 2, 3, 4) \end{array} \right\} \quad (13)$$

を解く。また、柱と梁の降伏応力  $\sigma_C$ 、 $\sigma_G$  (N/mm<sup>2</sup>) に対して  $\sigma_C = 325 + \Theta$ 、 $\sigma_G = 235 + \Theta$ 、 $0 \leq \Theta \leq 100$  のような不確定性があるものとする。

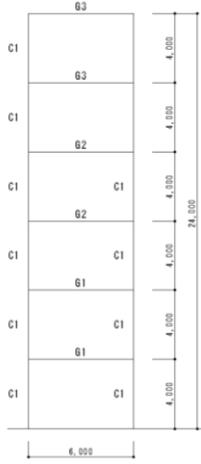


図1 軸組図

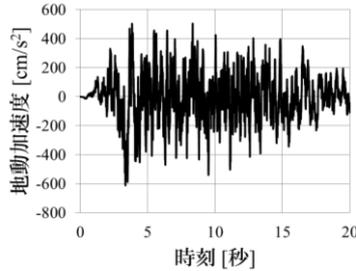


図2 加速度波形

表1. 部材断面リスト

番号	C1	G1, G2	G3
1	□-410×20	H-460×200×7×17	H-340×200×4×14
2	□-430×20	H-500×200×8×18	H-380×200×5×15
3	□-450×20	H-540×200×9×19	H-420×200×6×16
4	□-470×20	H-580×200×9×19	H-460×200×7×17
5	□-490×20	H-620×200×10×20	H-500×200×8×18
6	□-510×30	H-660×200×11×21	H-540×200×9×19
7	□-530×30	H-700×200×12×22	H-580×200×9×19
8	□-550×30	H-740×200×13×23	H-620×200×10×20
9	□-570×30	H-780×200×14×24	H-660×200×11×21
10	□-590×30	H-820×200×15×25	H-700×200×12×22

### 5.3 応答最悪値の検証

応答量として、建物の平均変形角（屋根変位を高さで割った値）の絶対値の最大値を用い、鋼材の降伏応力に不確定性があるものとする。順序統計量による方法は、確率分布に依存しないので、以下の解析例では一様分布とする。最大値の近似値の精度を検証するため、 $\beta = \gamma = 0.9$ 、 $\varepsilon = 3$  として問題(7)を解くと、以下のような結果が得られた。

$$(k, n) = (62, 65) \quad (14)$$

すなわち、PRSにおいて得られる65個の標本のなかで、62番目に小さい値である標本値を応答最悪値として用いればよい。65組の乱数を4ケース発生させて試行を行い、それぞれで得られた  $Y_{62,65}$  と  $Y_{65,65}$  を表2(a)に示す。また、4ケースそれぞれについて、1000個の標本に対して解析を行い、 $Y_{62,65}$  以下となる標本の数と割合も示している。3つのケースにて  $Y_{62,65}$  は上位10%以内に入っており、 $\gamma = 0.9$  が満たされている。また、1000回の解析を

50ケース試行した結果、 $Y_{62,65}$  以下となる標本の数を表2(b)に示す。表より、50回のうち46回(92%)で、 $Y_{62,65}$  の値は900位(90%)以上であり、 $\beta = \gamma = 0.9$  が満たされていることが確認できる。

表2(a)の例では、試行65回中の最大値  $Y_{65,65}$  のばらつきは、62番目に小さい値  $Y_{62,65}$  のばらつきよりも小さい。したがって、この例では、比較的少数の標本でも極値統計量(最大値)のふるまいは安定していると予想され、 $\varepsilon$  をより小さくしてもよいと考えられる。ただし、1000個の標本中の  $Y_{65,65}$  以下の標本数にはばらつきがあり、極値を用いた場合、適切な  $\beta, \gamma$  値を指定することは困難である。

表2. 平均変形角の近似最悪値の検証結果

(a)65回の試行による62番目と65番目に小さい値

case	1	2	3	4
$Y_{62,65}$	0.00686	0.00682	0.00684	0.00686
$Y_{65,65}$	0.00698	0.00699	0.00699	0.00701

1000個の標本による検証結果

$Y_{62,65}$ 以下の標本数	956	950	947	949
$Y_{62,65}$ 以下の割合	0.96	0.95	0.95	0.95
$Y_{1000,1000}$	0.00709	0.00708	0.00709	0.00705

(b)  $Y_{62,65}$  以下の標本数

956	925	964	928	945
950	964	988	967	947
947	919	989	960	968
949	880	933	916	976
902	938	944	963	943
926	892	959	950	922
920	944	921	949	960
913	882	949	890	928
953	961	900	923	908
954	975	945	944	963

### 5.4 最適化結果と確率的評価

局所探索の初期値と局所解を1対1に対応させるため、解ごとに乱数列を固定する。局所探索を50回( $t=50$ )実行したとき、表3のような2個の最適解が得られた。不確定性を考慮した方が、 $\Theta=0$  として不確定性を考慮しない場合と比べて材料体積が大きくなり、安全側になっていることが確認できる。

[C1,G1,G2,G3]=[5,7,7,6]の解を用いて解析したときの、1層の層せん断力と層間変形の履歴を図3に示す。不確定性がある場合の降伏応力(N/mm<sup>2</sup>)は、柱は366、梁は下層から307, 235, 265, 250, 244, 254とした。図3において、不確定性を考慮した解析結果を実線、不確定性を考慮しない場合の結果を点線で示した。いずれの場合も、平均層間変形角の最大値はほぼ0.01となっていることを確認できる。

不確定性を考慮した場合について、 $w$  と  $w_{est}$  の値の推移を図 4 に示す。式(5)に  $w=2$ 、 $t=50$  を用いると、不確定性を考慮する場合と考慮しない場合ともに、 $w_{est}=2.13$  を得る。Rule1 を用いると、1 個の局所解が得られている 7 回目の探索で終了条件を満たすが、50 回の探索終了時点での局所解は 2 個である。

表 3. 最適化結果

局所最適解	1	2	1	2
不確定性	$0 \leq \Theta \leq 100$		$\Theta = 0$	
C1	5	5	4	7
G1	5	6	5	5
G2	7	6	8	6
G3	6	6	4	2
目的関数値(m <sup>3</sup> )	1.1953	1.1913	1.1584	1.548
C-1	47	3	48	2
C-2	203	22	205	8

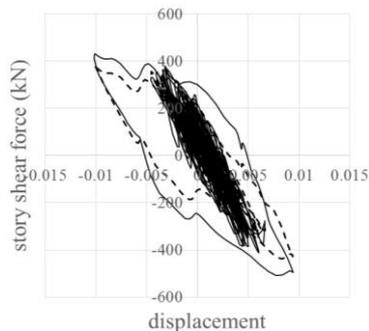


図 3 1 層の層せん断力と層間変形の履歴

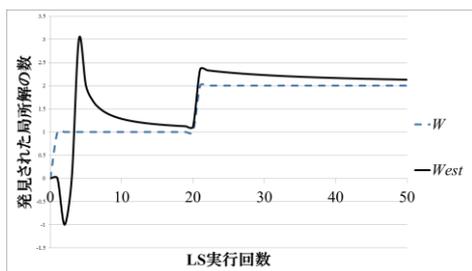


図 4 局所最適解数と Rule1 での予測値の履歴

表 4 局所最適解数と予測値

	$P_2^{(3)} / P_2^{(2)}$	$P_2^{(4)} / P_2^{(2)}$	$\bar{P}_2^{(3)}$
C-1-mean	$1.568 \times 10^{-9}$	$8.882 \times 10^{-16}$	$1.568 \times 10^{-9}$
C-1-min	$5.429 \times 10^{-2}$	$3.460 \times 10^{-3}$	$5.429 \times 10^{-2}$
C-2-mean	$1.568 \times 10^{-9}$	$8.882 \times 10^{-16}$	$1.568 \times 10^{-9}$
C-2-min	$9.425 \times 10^{-3}$	$1.323 \times 10^{-4}$	$9.425 \times 10^{-3}$

表 4 に示すように、Rule2 において、C-mean の場合  $P_2^{(3)} / P_2^{(2)}$  は十分に小さい値であり、探索の局所解が 3 個存在する確率は極めて小さい。しかし、C-1、C-2 のいずれの場合も、2 番目の局所解の attractor のサイズは 1

番目の局所解と比べて小さいので、C-min での値は十分に小さい値とはいえ、今後、多くの問題による検討が必要である。

## 6. 結論

本研究で得られた成果は以下のとおりである。

1. 順序統計量による近似最悪応答量の精度を、骨組の解析例により確認した。
2. 未探索の局所最適解の attractor のサイズを、既探索の局所最適化の情報から予測する方法を提案した。また、attractor のサイズと既探索の局所解が得られる尤度を用いて、多スタート局所探索の終了条件を提案した。
3. 降伏応力の不確定性を考慮した場合、考慮しない場合より部材体積が増加し、安全側の設計になることを確認した。
4. 6 層鋼構造骨組を最適化した結果、複数の局所最適解が存在することを確認し、多点スタート局所探索法の終了条件を検証した。しかし、今後は多くの局所最適解が存在する問題に対する検討が必要である。

## 謝辞

本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費（基盤研究(C)、代表：山川 誠、No. 25420576）の助成による。

## [参考文献]

- 1) I. Elishakoff and M. Ohsaki, Optimization and Anti-Optimization of Structures under Uncertainty, Imperial College Press, 2010.
- 2) M. Ohsaki and M. Katsura, A random sampling approach to worst-case design of structures, Struct. Multidisc. Optim., Vol. 46, pp. 27-39, 2012.
- 3) 日本建築学会 編, 建築構造設計における冗長性とロバスト性, 応用力学シリーズ 12, 2013.
- 4) M. Yamakawa and M. Ohsaki, Worst-case design of structures using stopping rules in k-adaptive random sampling approach, Proc. WCSMO10, No. 5314, 2013.
- 5) 山川 誠, 大崎 純, 朝山 秀一, パラメータ変動を有する構造最適化の順序統計量による精度評価, 第 36 回情報・システム・利用・技術シンポジウム, 日本建築学会, No. H13, pp. 173-176, 2013.
- 6) Open System for Earthquake Engineering Simulation (OpenSees), PEERC, UCB, 2006.
- 7) I. E. Lagaris and I. G. Tsoulos, Stopping rules for box-constrained stochastic global optimization, Appl. Math. Comp., Vol. 197, pp. 622-632, 2008.
- 8) C. G. E. Boender and A. H. G. Rinnooy Kan, Bayesian stopping rules for multistart global optimization methods, Mathematical Programming, Vol. 37, pp. 59-80, 1987.

- \*1 広島大学大学院工学研究科
- \*2 広島大学大学院工学研究科 教授
- \*3 東京電機大学未来科学部 准教授