

応力最小化を目的とした線織面シェルの形状最適化

○ 關 和也*¹ 大崎 純*²
藤田 慎之輔*³

キーワード：形状最適化 線織面 ベジエ曲線 応力最小化

1. 序

解析技術の進歩により、最適化手法が建築分野にも取り入れられ、近年では、力学的性能を考慮した形状最適化により、シェルの曲面形状を決定する研究が多くおこなわれている[1]。しかし、優れた建築の実現のためには意匠性、経済性、施工性などの非力学的性能も考慮することが不可欠である。施工性を考慮に入れた研究としては、ラチスシェルの部材の種類を少なくすることを目的とした小河ら[2]の研究、部材長の一様化を目的としたOhsaki and Fujita [3]の研究が挙げられる。

空間内で直線を曲線に沿って回転移動したときの軌跡として定義される曲面を線織面という。屋根構造の施工の際、複雑な曲面の表現は困難を要するが、母線が直線で形成される線織面は型枠作成が容易となるため、施工性に優れた曲面と言える。本研究では線織面で曲面形状を定義し、直線となる母線方向に部材を有するラチスシェルを対象に最適化を行うことで、施工性を考慮する。

線織面で定義されるラチスシェルを対象に、自重を作用させ、ひずみエネルギー最小化を目的とした最適化を行うと、鉛直変位を大幅に低減し、施工性に優れた、剛性の高い形状が得られる[4]。一方で、得られた最適形状に水平荷重を入力した場合、各部材の応力にばらつきが生じるため、部材断面を一様にできず、施工性や経済性に欠ける結果となった。そこで、本研究では、自重に加え、水平荷重も入力し、応力で定義される関数を目的関数として最適化を行うことで、応力のばらつきを抑え、施工性、経済性に優れたラチスシェルの形態を創出する。

2. 線織面

2.1 線織面の定義

線織面は次のように表される。

$$S(u, v) = f(u) + v g(u) \quad (1)$$

ここで、 $f(u)$ は基底曲線、 $g(u)$ は直線方向を定めるベクトルである。また、 u, v はスカラーパラメータである。 $g(u) = f(u) - h(u)$ として式(1)を変形すると、次式となる。

$$S(u, v) = (1-v)f(u) + v h(u) \quad (2)$$

$h(u)$ は基底曲線と等しいパラメータを持つ曲線であり、

$f(u)$ と $h(u)$ の同一のパラメータ値の点を結んだ直線が方向直線 $vg(u)$ である(図1)。2つの曲線 $f(u)$ 、 $h(u)$ により曲面形状が表現可能なため、曲面を最適化の際の変数の数を大幅に低減でき、最適解への収束性を向上できる。

2.2 ベジエ曲線を用いた線織面

本研究では、線織面の定義式における曲線 $f(u)$ と $h(u)$ をベジエ曲線で定義し、それらを連結する直線 $vg(u)$ で定められる線織面を表現する。

k 次のベジエ曲線 $P_k(u)$ を次式で定義する。

$$P_k(u) = \sum_{i=0}^k q_i B_{k,i}(u) \quad (3)$$

$$q_i = [q_{x,i}, q_{y,i}, q_{z,i}]^T$$

ここで、 q_i は制御点座標ベクトルである。 $B_{k,i}(u)$ は k 次のバーンスタイン基底関数であり、次式で定義される。

$$B_{k,i}(u) = \frac{k!}{i!(k-i)!} u^i (1-u)^{k-i} \quad (0 \leq u \leq 1, i=0, \dots, k) \quad (4)$$

式(3)で定義したベジエ曲線を曲線 $f(u)$ と $h(u)$ に代入すると、線織面の定義式 $S(u, v)$ は次式となる。

$$S(u, v) = (1-v) \sum_{i=0}^I q_i B_{I,i}(u) + v \sum_{i=0}^J q_{I+i} B_{J,i}(u) \quad (5)$$

$(0 \leq u, v \leq 1)$

I, J はそれぞれ $f(u)$ と $h(u)$ のベジエ曲線の次数である。このように、曲線 $f(u)$ と $h(u)$ にベジエ曲線を選ぶことで、自由度を確保でき、ごく少数の制御点で様々な曲面形状を効果的に記述できる。

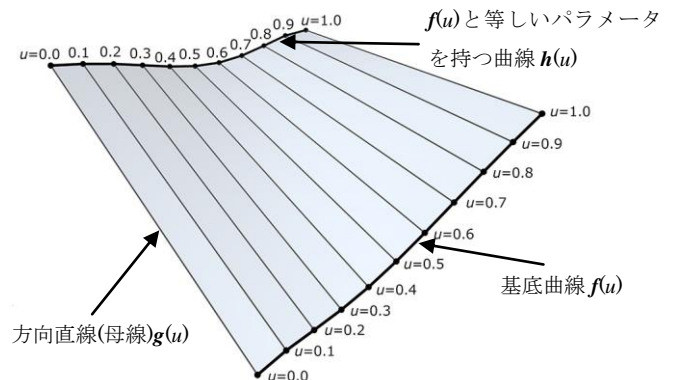


図1 線織面の概念

3. 最適化概要

m 個の部材からなる n 自由度のラチスシェル構造物を考える。有限要素は梁要素とし、1 部材 1 要素とする。各部材の両端の軸力をそれぞれ N_{i1}, N_{i2} ($N_{i1} = -N_{i2}$) とし、 y, z 軸周りの曲げモーメントをそれぞれ $M_{y_{i1}}, M_{y_{i2}}, M_{z_{i1}}, M_{z_{i2}}$ ($i=1 \sim m$) とする(図 2)。部材を円形鋼管とし、断面積を A_i 、断面係数を Z_i とすると、端部の応力 σ_{i1} は次のように表される。

$$\sigma_{i1} = \frac{|N_{i1}|}{A_i} + \frac{\sqrt{M_{y_{i1}}^2 + M_{z_{i1}}^2}}{Z_i} \quad (6)$$

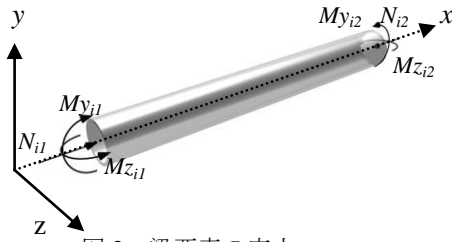


図 2 梁要素の応力

応力の大きな値から順に $\sigma_{\max 1}, \sigma_{\max 2}, \dots, \sigma_{\max 10}$ とし、応力の最大値を下式を用いて近似する。形状変化に応じて最大応力が生じる部材は変化するため、最大応力を目的関数とすると、目的関数は設計変数に関して滑らかではなくなる。そこで下式のように最大応力を近似することで非滑性を低減する。

$$\sigma^P = \left(\sum_{i=1}^{10} \sigma_{\max i}^P \right)^{\frac{1}{P}} \quad (7)$$

ここで、式(7)の P の値は近似制度を決定するパラメータであり、値が大きいくほど最大応力を高精度で近似できるが、近似曲線の曲率が大きくなる。

図 3 に $100 \sim 200$ [N/mm²] の間の値をとる 2 つの応力に対して、 $P=5$ 、 $P=10$ としたときの近似式で与えられる最大応力値のグラフをそれぞれ示す。

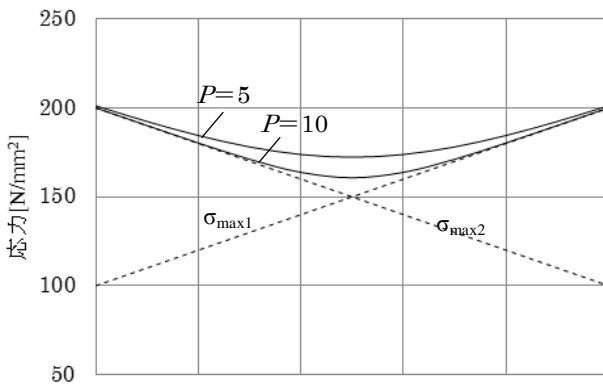


図 3 近似式を用いた最大応力値

制御点座標などの変数のベクトルを \mathbf{x} とし、式(7)において、 $P=10$ とした σ^{10} を最適化の際の目的関数として採用する。

$$f(\mathbf{x}) = \sigma^{10} \quad (8)$$

式(8)の $f(\mathbf{x})$ を最小化することで、応力を制限しつつ、力学性能が高く、施工性、経済性に優れたラチスシェルを創出する。

また、最適化の結果、曲面の表面積の縮小により剛性が高められ、非現実的な形状となる傾向がある。そのため、部材長の総和 $L(\mathbf{x})$ が初期値 L_0 より小さくならないという以下のような制約を与える。

$$L(\mathbf{x}) - L_0 \geq 0 \quad (9)$$

解析には OpenSees [5] を使い、最適化には SNOPT [6] を用いる。最適化手法は逐次 2 次計画法であり、感度係数は差分で求める。

4. 最適化モデル概要

最適化モデルは平面と立面の両方から見てアーチ状となる、2 つのベジエ曲線を持つ線織面で形状記述されるラチスシェルとする(図 4(a), (b))。それぞれのベジエ曲線の次数は 5 であり、制御点数は 6 である。図 4 に示すように x, y, z 軸を定め、設計変数をベジエ曲線の制御点の x, y, z 座標とする。図 4 に黒点で示された 4 隅の支点間の距離は 50 m であり、支点上の制御点の座標は固定する。したがって、変数の数は $4 \times 2 \times 3 = 24$ である。図 4 に示す初期解での総部材長は、 $L_0 = 3113$ m である。

支持条件は黒丸で示した 4 隅を固定支持とし、部材数は 320 である。節点位置を定めるパラメータ (式(5)における u, v の節点位置での値) は、それぞれ等分割し、 $u_i, v_i = 0.0, 0.1, \dots, 1.0$ とする。外力は単位体積あたり重量 77000 N/m³ とした自重に加え、ガラス屋根を想定した単位面積あたり重量 290 N/m² の積載荷重を鉛直荷重として、それらの合計の 0.2 倍の値を水平荷重としてそれぞれ作用させる。部材断面について、直線材となる母線方向の部材と曲線方向におけるベジエ曲線で表される両端の部材は、外径 267.4 mm、厚さ 9 mm の円形鋼管とし、その他の部材は、外径 139.8 mm、厚さ 4.5 mm の円形鋼管とする。ヤング率を 210.0 GPa、ポアソン比を 0.34 とする。

初期形状に対し、水平荷重を x, y のそれぞれの方向に作用させた場合の応力分布を図 5(a), (b) に、目的関数値、最大応力、鉛直方向最大変位、水平 x 方向最大変位、水平 y 方向最大変位を表 1 に示す。図 5 において、各部材の両端に発生する応力のうち、大きな値を各部材の応力として示している。

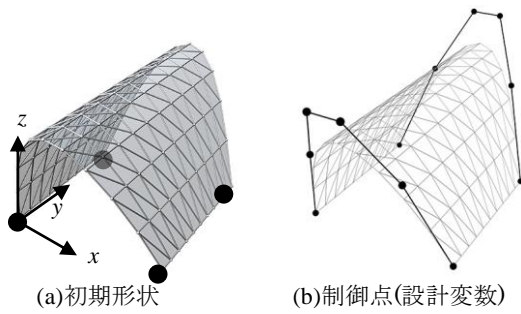


図4 初期解

応力[N/mm ²]	■ : ~120	■ : 120~240
	■ : 240~720	■ : 720~1680
		■ : 1680~

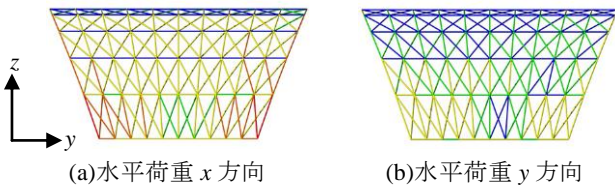


図5 応力分布

表1 初期解の応答量

水平荷重作用方向	x 方向	y 方向
目的関数値[N/mm ²]	2531.6	796.7
最大応力[N/mm ²]	2406.8	704.3
鉛直方向最大変位[mm]	4139.1	883.0
水平 x 方向最大変位[mm]	10380.0	2046.5
水平 y 方向最大変位[mm]	35.1	81.7

5. 形状最適化

5.1 x 方向に水平荷重を作用させた場合

x 方向に水平荷重を作用させた場合の最適形状を図 6 に、応力分布を図 7 にそれぞれ示す。目的関数値、最大応力、鉛直方向最大変位、水平 x 方向最大変位、水平 y 方向最大変位、総部材長を表 2 に示す。

最適化の結果、図 6 を見ると屋根の頂部が鉛直軸に関してねじれる形状となった。図 7 を見ると、最適化を行うことで、各部材の応力を大幅に低減できており、一様となっていることがわかる。また表 2 を見ると、鉛直方向最大変位、水平 x 方向最大変位も大幅に低減でき、ラチスシェルに対し、最大応力を最小化することが有効であるといえる。



図6 最適形状

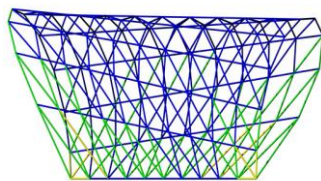


図7 応力分布

表2 x 方向入力に対する最適解の応答量

水平荷重方向	x 方向
目的関数値[N/mm ²]	330.2
最大応力[N/mm ²]	285.2
鉛直方向最大変位[mm]	305.5
水平 x 方向最大変位[mm]	525.3
水平 y 方向最大変位[mm]	48.4
総部材長[m]	3113

5.2 y 方向に水平荷重を作用させた場合

y 方向に水平荷重を作用させた場合の最適形状を図 8 に、応力分布を図 9 にそれぞれ示す。目的関数値、最大応力、鉛直方向最大変位、水平 x 方向最大変位、水平 y 方向最大変位、総部材長を表 3 に示す。

最適化の結果、図 8 を見ると、x 方向に水平荷重を作用させた場合と類似した最適形状が得られた。初期形状の x,y 方向の変位に着目すると水平荷重が x,y のいずれの方向に作用した場合においても、x 方向の変位が支配的であり、また、初期解において、荷重の方向に関わらず、どちらも支持部に大きな応力が集中していることから、応力を制御する上で、5.1 項の場合と同様に、x 方向の過大な変位と支持部の応力を低減させる方向に最適化が進んだものと考えられる。



図8 最適形状

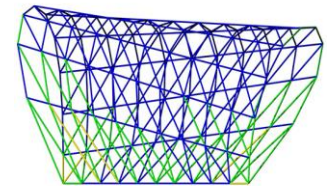


図9 応力分布

表3 y 方向入力に対する最適解の応答量

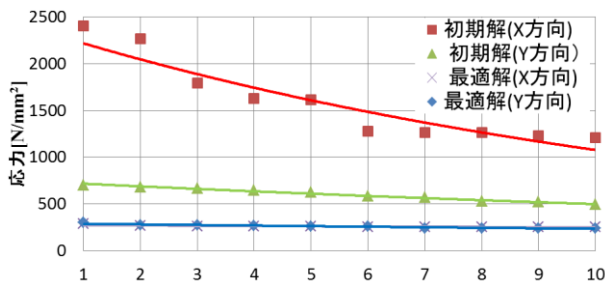
水平荷重方向	y 方向
目的関数値	335.9
最大応力[N/mm ²]	299.9
鉛直方向最大変位[mm]	275.2
水平 x 方向最大変位[mm]	370.4
水平 y 方向最大変位[mm]	75.5
総部材長[m]	3113

初期解と 5.1 項、5.2 項から得られた最適解において、最大から 10 番目までの応力の値を表 4 に示す。また、表中の括弧内に各形状に対し、水平荷重を作用させている方向を示す。

表 4 を見ると、いずれの方向に水平荷重を作用させた場合においても、最大から 10 番目までの応力は同程度の値まで低減できていることがわかる。また、x 方向に水平荷重を作用させた場合の初期解における応力に着目する

と、かなりのばらつきがあるが、応力を制限することで、そのばらつきを抑えられている。

表 4 最大から 10 番目までの応力の値



5.3 x, y の 2 方向の水平荷重を考慮した場合

5.1 項, 5.2 項から得られた最適形状に対し, 最適化の際に入力した水平荷重の方向に直交するような水平荷重を作用させ, 直交方向の水平荷重に対する応力の検証をおこなった。その結果の応力分布を図 10(a), (b)に示す。また, 水平荷重を作用させている方向を括弧内に示す。

図 10 を見ると, 5.1 項, 5.2 項のそれぞれの最適形状はともに直交方向の水平荷重に対しては有効な形状ではないことがわかる。そこで x,y のそれぞれの方向の水平荷重を考慮すべく, 最適化の際の水平荷重として x,y 方向の水平荷重を交互に入力し, 目的関数値が大きくなる水平荷重の方向に対して最適となるような最適化問題を解く。

上述した最適化の結果として, 最適形状を図 11(a), (b)に, 応力分布を図 12 にそれぞれ示す。目的関数値, 最大応力, 鉛直方向最大変位, 水平 x 方向最大変位, 水平 y 方向最大変位を表 5 に示す。図 11 に示す最適解での総部材長は, $L=3113$ m である。

最適化の結果, 図 12 を見ると, 応力を一様に低減できている。2 方向の荷重に対して有効な形状であることがわかる。一方で, 図 11 に示した赤丸の部分では, 部材長が極端に短くなっており, 施工性, 経済性の観点からすると, 非現実的な形状であるとも言える。

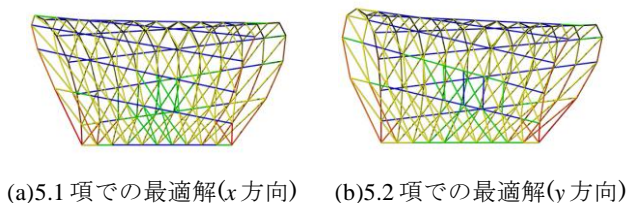


図 10 直交方向に水平荷重を作用させた場合の応力分布

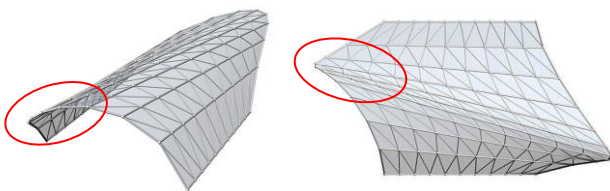


図 11 最適形状

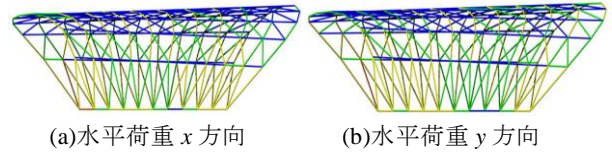


図 12 最適解の応力分布

表 5 x, y 方向入力に対する最適解の応答量

水平荷重作用方向	x 方向	y 方向
目的関数値[N/mm ²]	858.9	858.9
最大応力[N/mm ²]	768.2	753.7
鉛直方向最大変位[mm]	1176.9	1989.5
水平 x 方向最大変位[mm]	1599.3	860.2
水平 y 方向最大変位[mm]	273.7	97.1

6. 結論

本研究で得られた成果は以下の通りである。

- 1)線織面を定める曲線をベジエ曲線で定義することで, 制御点の位置を定める少ない変数で, さまざまな形状の線織面を表現することができる。
- 2)荷重条件に自重だけでなく, 水平荷重を追加した場合, 最大応力を最小化することで, 応力を一様に低減でき, 剛性のある, 施工性, 経済性の優れたラチスシェル構造物の創出が可能である。
- 3)2 方向の水平荷重を考慮した場合, 最適形状では極端に長さが短くなる部材もあり, 施工性, 経済性に欠ける形状であるため, 今後は各部材の長さも考慮した手法を検討する。

[参考文献]

- 1) M. Ohsaki, T. Nakamura and M. Kohiyama, Shape optimization of a double-layer space truss described by a parametric surface, Int. J. Space Struct, Vol.12, No.2, 1997.
- 2) 小河利行, 大崎純, 立石理恵, 線形屈荷重最大化と部材長一様化を目的とした単層ラチスシェルの形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.579, pp.129-136, 2003.
- 3) M. Ohsaki and S. Fujita, Multiobjective shape optimization of latticed shells for elastic stiffness and uniform member lengths, Proc. ALGODE TOKYO 2011, 2011.
- 4) 關和也, 大崎純, 藤田慎之輔, 線織面を有するラチスシェルの形状最適化, 日本建築学会中国支部研究会報告集, No.210, 2014
- 5) Open System for Earthquake Engineering Simulation (Open Sees), PEERC, UCB. <http://opensees.berkeley.edu/>
- 6) W. Murray P. Gill and M. Saunders, User's Guide for SNOPT Version 7: Software for Large-Scale Nonlinear Programming. Stanford Business Software Inc., 2008.

*1 広島大学大学院工学研究科 大学院生
 *2 広島大学大学院工学研究科 教授 博士(工学)
 *3 金箱構造設計事務所 博士(工学)