空間充填多面体を用いた剛な Panel-Hinge フレームワークの生成

○小林 祐貴[*1] 加藤 直樹[*2]
岡野 知広[*3] 瀧澤 重志[*4]

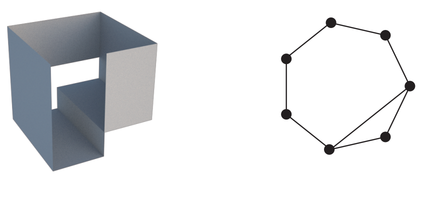
キーワード : Panel-hinge フレームワーク　Panel-hinge グラフ　組合せ剛性理論

1　はじめに

本研究で扱う **panel-hinge フレームワーク**とは, **ヒンジ**によってつながれた 2 次元の剛な**パネル**の集合である (図 1(a)). ここでのヒンジとは直線で, ヒンジによってつながれた 2 つのパネルの動きはヒンジ周りの回転である. すべてのパネルの動きが, 元々の構造体の合同変換のみである場合, そのフレームワークは**剛**であると呼ぶ. さらに, 剛なフレームワークから任意のヒンジを 1 つ取り除いた場合, 柔軟になるフレームワークのことを**極小剛**と呼ぶ.

panel-hinge フレームワークをグラフ $G = (V, E)$ と $e \in E$ から $\mathbb{R}^3$ 上の線分への写像 $\boldsymbol{p}$ の組 $(G, \boldsymbol{p})$ として考える．$v \in V$ はパネルに対応し，$uv \in E$ は2つのパネルを u, v をつなぐヒンジ $\boldsymbol{p}(uv)$ に対応する．このとき，$\mathbb{R}^3$ 上にグラフ G が実現されたという．すなわち, panel-hinge グラフ（図 1(b)）は，panel-hinge フレームワーク (図 1(a)) のパネルを頂点，ヒンジを辺とするグラフとして捉えたものである．

本研究が基づく組合せ剛性理論では, このように構造物の接続関係をグラフとして扱い, 剛性の組合せ的な特徴付けを行う. 組合せ剛性理論における構造物の剛性は, “一般的な配置” が前提とされており, 建築的な応用を行う際には注意する必要がある. 一般的な配置については 2.1 節で述べる．

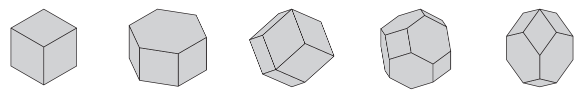


(a)　　(b)

図 1　(a) panel-hinge フレームワーク (b) panel-hinge グラフ

平行移動のみを許した場合に, 1 種類の多面体で空間充填可能な空間充填多面体は 5 種類 (図 2) 存在することが知られている [1, 2]. そのうちの立方体と切頂八面体について, 再帰的に剛な panel-hinge フレームワークを生成する手法を開発した.

本稿では, はじめに直交パネルについて剛な panel-hinge フレームワークを生成する手法を紹介し, 操作後のフレームワークが剛であることの証明手法について述べる．その後，再帰的に生成した剛な空間充填多面体の panel-hinge フレームワークの例を示す．



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

図 2　(a) 立方体 (b) 六角柱 (c) 菱形十二面体 (d) 切頂八面体 (e) 長菱形十二面体

2　準備

2.1　Panel-hinge フレームワークの剛性行列

以下の記述は, [4] に従う. パネルの合同変換は同次座標系を用いることで, 平行移動と回転を共に含んだ 4×4 の行列 M で表すことができる. ここで, 2 つのパネル B, B' がヒンジ H によって接続されているとし, H の両端点の同次座標を $\boldsymbol{p_1} = (p_{1,x}, p_{1,y}, p_{1,z}, 1)$, $\boldsymbol{p_2} = (p_{2,x}, p_{2,y}, p_{2,z}, 1)$ とする. そして, パネルの動きを表す行列 M, M' がそれぞれ B, B' に与えられているとする. このとき, ヒンジによる制約は $M\boldsymbol{p_1} = M'\boldsymbol{p_1}$, $M\boldsymbol{p_2} = M'\boldsymbol{p_2}$ と表すことができる. この等式を微分して, 以下の式が得られる.

$$I\boldsymbol{p}_i = I'\boldsymbol{p}_i \quad \text{for } i = 1, 2 \tag{1}$$

I および I' は B, B' に割り当てられた無限小動きとみなすことができる. 無限小動きの定義より, すべての $e = uv \in E$ について, 以下の等式を満たす $r_i(\boldsymbol{p}(e))$ をとることができ, このとき S を $(G, \boldsymbol{p})$ の無限小動きとよぶ.

$$(S(u) - S(v)) \cdot r_i(\boldsymbol{p}(e)) = 0 \tag{2}$$

I は $\begin{pmatrix} R & v^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と表すことができる．ここで，$v = (v_x, v_y, v_z)$ とし，$R = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$ と表わすことができる．同様に，I' も $\begin{pmatrix} R' & v'^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と表すことができ，(2) に代入して整理し，以下の式を得る．

$$\left(\begin{vmatrix} \omega_y - \omega'_y & \omega_z - \omega'_z \\ p_{1,y} & p_{1,z} \end{vmatrix} + v_x - v'_x, \begin{vmatrix} \omega_z - \omega'_z & \omega_x - \omega'_x \\ p_{1,z} & p_{1,x} \end{vmatrix} + v_y - v'_y, \right.$$
$$\begin{vmatrix} \omega_x - \omega'_x & \omega_y - \omega'_y \\ p_{1,x} & p_{1,y} \end{vmatrix} + v_z - v'_z, \begin{vmatrix} \omega_y - \omega'_y & \omega_z - \omega'_z \\ p_{1,y} - p_{2,y} & p_{1,z} - p_{2,z} \end{vmatrix},$$
$$\left. \begin{vmatrix} \omega_z - \omega'_z & \omega_x - \omega'_x \\ p_{1,z} - p_{2,z} & p_{1,x} - p_{2,x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \omega_x - \omega'_x & \omega_y - \omega'_y \\ p_{1,x} - p_{2,x} & p_{1,y} - p_{2,y} \end{vmatrix} \right) = 0.$$

このとき，次の等式をみたす t が存在する．

$$(\omega - \omega', v - v') = t \left(\begin{vmatrix} p_{1,x} & 1 \\ p_{2,x} & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_{1,y} & 1 \\ p_{2,y} & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_{1,z} & 1 \\ p_{2,z} & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_{1,y} & p_{1,z} \\ p_{2,y} & p_{2,z} \end{vmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{vmatrix} p_{1,z} & p_{1,x} \\ p_{2,z} & p_{2,x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_{1,x} & p_{1,y} \\ p_{2,x} & p_{2,y} \end{vmatrix} \right) \qquad (3)$$

(2) の左辺はヒンジでつながれた両側の剛体の無限小動きを表わしており，右辺の 6 次元ベクトルはヒンジ H による制約を表している．これを H による 2-extensor $C(H)$ と呼ぶ．

(1) の無限小動きは $5|E|$ 個の等式で記述され，$5|E| \times 6|V|$ の行列 $R(G, \boldsymbol{p})$ を

$$\begin{array}{c} \\ e = uv \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \cdots & u & \cdots & v & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots \mathbf{0} \cdots & r(\boldsymbol{p}(e)) & \cdots \mathbf{0} \cdots & -r(\boldsymbol{p}(e)) & \cdots \mathbf{0} \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

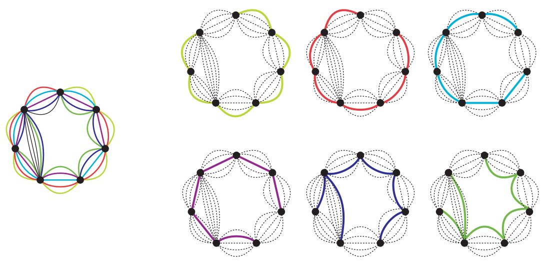
とする．ここで，$r(\boldsymbol{p}(e))$ は 5×6 の行列であり，$r(\boldsymbol{p}(e)) = \begin{pmatrix} r_1(\boldsymbol{p}(e)) \\ \vdots \\ r_{D-1}(\boldsymbol{p}(e)) \end{pmatrix}$ である．この $R(G, \boldsymbol{p})$ を**剛性行列**と呼び，$R(G, \boldsymbol{p})$ のランクが $6(|V| - 1)$ と等しい場合，そのフレームワークは剛であることが知られている [4]．$R(G, \boldsymbol{p})$ およびすべての辺について誘導される部分行列において最大のランクをとるとき，そのフレームワークのヒンジ配置は**一般的**であるという．

2.2 Panel-Hinge フレームワークの組合せ的特徴付け

panel-hinge フレームワークの組合せ的特徴付けとして，以下の命題が知られている [4]．

命題 1 (Katoh et al.)**.** [4] グラフ G の各辺を 5 本の多重辺で置き換えたグラフを $\widetilde{G}$ とする．$\widetilde{G}$ が 6 個の辺素な全域木をもつことは，G が $\mathbb{R}^3$ において一般的なヒンジ配置をとる剛な panel-hinge フレームワークとして実現可能であることの必要十分条件である．

図 3(a) は図 1(a) の panel-hinge フレームワークに対応するグラフである．G を 5 重化したグラフ $\widetilde{G}$ には図 3(b) のように 6 つの辺素な全域木を詰込むことが可能であり，命題 1 は 3 次元上に一般的なヒンジ配置をとる剛な panel-hinge フレームワーク $(G, \boldsymbol{p})$ を実現可能であることを示している．



(a) (b)

図 3　(a) 図 5(c) に相当する極小剛な panel-hinge グラフを 5 重化したグラフ，(b) (a) に詰込むことが可能な 6 つの辺素な全域木

筆者らは [5] において，極小剛な panel-hinge グラフを演繹的にすべて生成する操作を開発した．

3 形態生成

xy, yz, zx 平面のいずれか 1 つに対して平行で，面の端にヒンジを設けるという制約で形態生成を行った．剛な panel-hinge フレームワークを演繹的に生成する以下の 2 つの操作を開発した．この 2 つの操作によってできるフレームワークは，一般的なヒンジ配置ではないため，2.1 節で述べた手法を用いて，操作を施すことによってできるフレームワークが剛であることを示すことができる．

3.1 直交するパネルを追加する操作

操作 1（Add 2-panel）：パネルの端点 v が他のパネルと接続していないパネル P_1 を選択する．新たに 2 枚のパネル P_2, P_3を P_1 に対して追加する．ここで，P_1, P_2, P_3 は互いに直交し，P_2, P_3 は P_1 と，P_2 は P_3 とヒンジで接続し，3 つのヒンジは v で交わる．

図 4, 5 にそれぞれ操作 1 の生成順序，操作 1 を繰り返し実行した例を示す．図 5 の例では，ランダムにパネルを選択している．

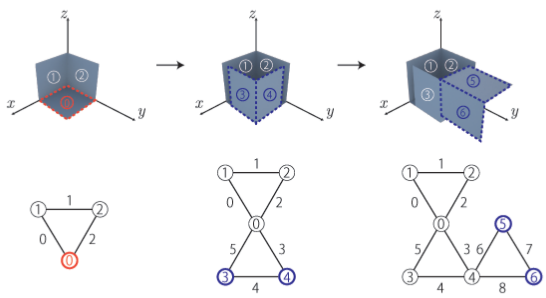


図 4　操作 1 の生成順序

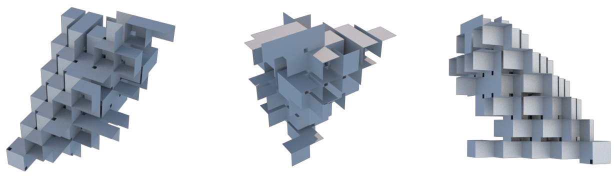


図 5　操作 1 の実行例

操作 2 （Add 3-panel）：パネルの端点 v が他のパネルと接続していないパネル P_1 を選択する．新たに 3 枚のパネル P_2, P_3, P_4 を P_1 に対して追加する．ここで，P_1, P_2, P_3 は互いに直交し，P_2, P_4 は P_1 と，P_2 は P_3 と，P_3 は P_4 とヒンジで接続する．

図 6, 7 にそれぞれ操作 2 の生成順序, 操作 2 を繰り返し実行した例を示す．図 7 の例では，(a) ではランダムにパネルを選択し，(b) ではパネルを追加可能な領域を制約し, 形態生成を行っている．

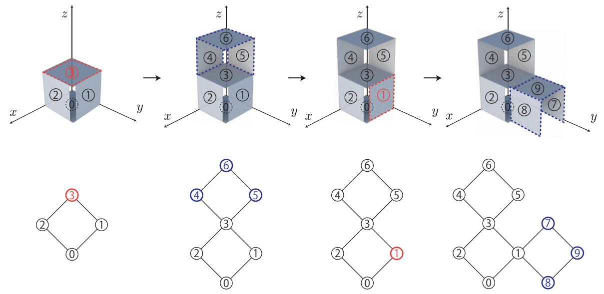
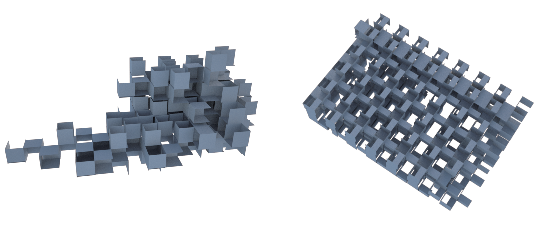


図 6　操作 2 の生成順序



(a)　(b)

図 7　操作 2 の実行例

以下の定理を示した．

定理 1. 剛な panel-hinge フレームワークに対して, 操作 1 または操作 2 を施した後の panel-hinge フレームワークもまた剛である．

以下に, 操作 1 についての証明を記す．

証明 $P_1 = (x_1, y_1, 0)$, $P_2 = (x_1, y_2, 0)$, $P_3 = (x_1, y_2, z_1)$, $P_4 = (x_2, y_1, 0)$ とし，$x_1 \neq x_2$，$y_1 \neq y_2$，$z_1 \neq 0$とする．ヒンジ P_1P_2，P_2P_3，P_2P_4 の 2-extensor をそれぞれ $C(\boldsymbol{p}(1))$, $C(\boldsymbol{p}(2))$, $C(\boldsymbol{p}(3))$ とし，以下の式を得る．

$$
\begin{aligned}
C(\boldsymbol{p}(1)) &= (0, -(y_1 - y_2), 0, 0, 0, x_1y_2 - x_1y_1) \quad (4)\\
C(\boldsymbol{p}(2)) &= (0, 0, -z_1, y_2z_1, -x_1z_1, 0) \quad (5)\\
C(\boldsymbol{p}(3)) &= (x_1 - x_2, -(y_2 - y_1), 0, 0, 0,\\
&\quad x_1y_1 - x_2y_2) \quad (6)
\end{aligned}
$$

ヒンジ P_1P_2, P_2P_3, P_2P_4 によって繋がれるパネルの無限小動きをそれぞれ, S_1 と S_2, S_2 と S_3, S_3 と S_1 とする. (2) より, 以下の式を得る.

$$S_2 - S_1 = t_1C(p(1)) \quad (7)$$
$$S_3 - S_2 = t_2C(p(2)) \quad (8)$$
$$S_1 - S_3 = t_3C(p(3)) \quad (9)$$

(7), (8), (9) の両辺を足し，以下の式を得る．

$$0 = t_1C(p(1)) + t_2C(p(2)) + t_3C(p(3)) \quad (10)$$

(4), (5), (6) を (10) に代入し, $0 = t_3(x_1 - x_2)$, $0 = (y_1 - y_2)(t_3 - t_1)$，$0 = -t_2z_1$，$0 = -t_2x_1z_1$，$0 = t_1(x_1y_2 - x_1y_1) + t_3(x_1y_1 - x_2y_2)$ を得る．$x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq 0$ より $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ となる．したがって, (7), (8), (9) より, $S_1 = S_2 = S_3$ となる．従って，操作 1を施してできる構造物もまた, 剛である． □

本稿では省略するが操作 2 についても, 同様な手法により証明可能である．

3.2　空間充填多面体を用いた剛な Panel-Hinge フレームワークの生成

空間充填多面体を利用することで，パネルが交差することなく panel-hinge フレームワークを生成することができる．基本形とした立方体 (図 8(a)，F_0) は 2 つの正方形と 1 つのヒンジ，切頂八面体 (図 9(a)，F_0)

は 5 つの正方形パネルと 2 つの六角形パネルが除かれている．

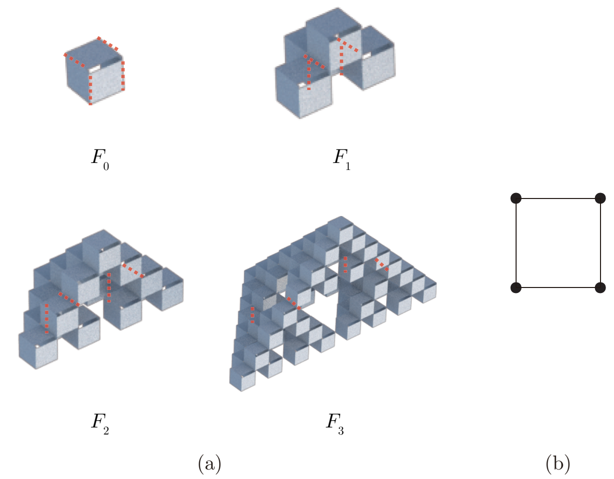


図 8　直方体を基本形とした形態生成例

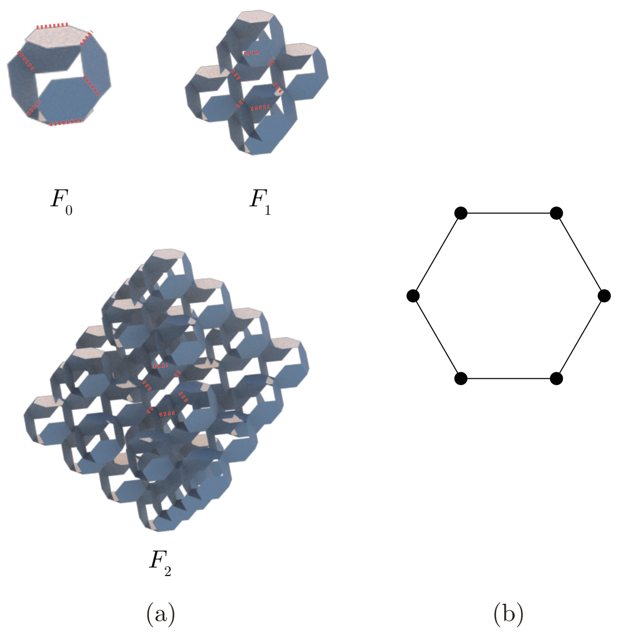


図 9　切頂八面体を基本形とした形態生成例

これらのヒンジ配置は一般的ではないため，3.1 節と同様な手法により，剛であることを確認している．さらに，F_0 の各パネルを F_0 自身によって置き換えることによってできるフレームワークが F_1 である．同様に，F_1 から F_2 を得ることができる．従って，新たに生成される panel-hinge フレームワークもまた，ひとつ前のフレームワークを各頂点とするような，同じ body-hinge グラフをもつこととなる．

図 8(a), 図 9(a) はそれぞれ, 立方体, 切頂八面体を基本形とし，図 9(b) のグラフの接続関係で形態生成を行った例である．また, 図中の赤色の破線は, 剛体同士を接続するために, 新たに追加されたヒンジを表す．

また, 同じ接続関係が保たれていれば，剛であることから図 10 のように，面の位置を変更することで，異なる剛なフレームワークを実現可能である．

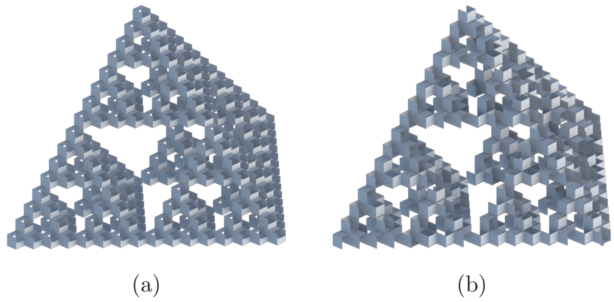


図 10　直方体を基本形とした形態生成例. (a) ヒンジが存在しない箇所の隙間を 0.5 とした場合． (b) 0. 1 とした場合．

4　まとめ

立方体と切頂八面体について，剛な panel-hinge フレームワークを生成する手法を開発した．本手法により剛性行列を計算することが困難となるような，構成する部材数の多い剛なフレームワークを得ることが可能である．

[参考文献]

1) Alexandrov, A. D.: Convex Polyhedra. Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1950 (in Russian), English translation: Springer, Berlin, 2005.
2) Fedorov, E. S.: An introduction to the theory of figures (in Russian). *Notices of the Imperial Mineralogical Society*, **2**(21), 1–279, 1885.
3) Henneberg, L.: Die graphische statik der starren system. Leipzig, 1911.
4) Katoh, N. and Tanigawa, S.: A proof of the molecular conjecture. *Discrete Comput Geom*, Vol. 45, pp. 647–700, 2011.
5) Kobayashi, Y., Higashikawa, Y., Katoh, N., and Kamiyama, N.: An Inductive Construction of Minimally Rigid Body-Hinge Simple Graphs. *Theoretical Computer Science*, **556**(0), 2–12, 2014.
6) Tay, T.: Rigidity of multi-graphs.i:linking rigid bodies in n-space. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 36, No. 1, pp. 95–112, 1984.
7) Whiteley, W.: The union of matroids and the rigidity of frameworks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 1, No. 2, pp. 237–255, 1988.

*1 京都大学大学院工学研究科　博士課程
*2 京都大学大学院工学研究科　教授　工博
*3 北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科　修士課程
*4 大阪市立大学大学院工学研究科　准教授　博士(工)