

擬似焼きなまし法を用いた膜曲面の極小曲面探索法

西村 督*¹

○山中 郁美*²

キーワード：膜構造 極小曲面 大域的最適解 擬似焼きなまし法

1. 序

膜材料は応力緩和する材料であり、縦糸と横糸の初期張力の比率が異なる場合でも、時間経過で張力比が等しくなる傾向がある¹⁾。また恒久膜構造の形状は、膜面にしわが生じにくくする観点から、初期張力が均一になる形状が望ましい。以上の理由から、膜構造の設計の初期段階では、等張力曲面（膜面の全ての位置において、面内せん断応力が零、主応力が等しい引張応力となる曲面）を原型曲面としてきた²⁾。

重力を無視した理想状態では、等張力曲面は極小曲面になることが知られている²⁾。極小曲面とは、閉曲線に張られる曲面の中で表面積が極小となる曲面であり、平均曲率が零の曲面でもある。極小曲面を解析的に表現したのは Lagrange, Euler, Meusnier ら数学者であり、曲面 $z=f(x,y)$ が極小曲面となる条件は

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0 \quad (1)$$

であることを示した³⁾。ここに

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

また、次式の面積汎関数 S を停留する条件

$$\delta S = \delta \iint \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} dx dy = 0 \quad (3)$$

として表すことができる。有限要素で曲面を離散化し、(1)~(3)式から次式の変位 \mathbf{u} に関する非線形連立方程式が得られる。

$$G(\mathbf{u}) = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (4)$$

与えられた境界に張られる極小曲面の性質を調べる問題は Plateau 問題と呼ばれ、数学分野で研究されてきた。小磯は Plateau 問題に関する主要な研究成果を紹介している³⁾。例えば 1930 年に J. Douglas と T. Radó は与えられた閉曲線に張られる極小曲面が存在することを証明し、(1),(3)式の解の存在を保証した。また、解の唯一性は一般に成立せず、極小解の個数が有限であるか否かは自明でない。この根本的な理由は、Plateau 問題の非線形性に由来する。

任意の境界条件に対して、(4)式の解を解析的に求めることは不可能であり、模型実験や数値的方法によらざる

を得ない。Hinata, Shimasaki and Kiyono は多価の境界値問題となる Plateau 問題を有限要素法で解く方法を提示し、自由境界問題として、回転懸垂曲面、Wiener-Douglas 問題の解析結果を示している⁴⁾。(4)式の解法に降下法である一般化ニュートン法を用いている。鈴木と半谷は、曲面の座標 (x,y,z) を等温直交座標変換し、調和方程式の解として一変数に縮約できることを示し、その変数を膜要素の初期曲面で定義される方向余弦方向の移動距離とする解析法を提案した⁵⁾。この手法による回転懸垂曲面、Wiener-Douglas 問題、HP 曲面の形状解析結果は、解析解や他の解析結果と良く対応している。石原、八木、萩原、大森は、極小曲面の解析に複数の変分汎関数を線形結合した複合変分汎関数を定義し、この関数を構成しているパラメータを制御することで原問題の解の計算過程で遭遇する特異点を回避できる手法を提案している⁶⁾。内包体積と要素面積を付帯条件とした汎関数を用いて、Wiener-Douglas 問題を解き、異なる3つの極小曲面を得ている。また極小曲面の安定性、平均曲率が零のときに極小曲面が得られることも示している。

面積最小の極小曲面を求める問題は、大域的最適解を求める最適化問題となる。線形化増分解で膜面積が停留する極小曲面を求める場合、初期形状の設定によっては、局所最適解としての極小曲面が得られ、必ずしも最小面積曲面が得られるとは限らない。この原因は非線形問題特有の初期値依存性である。近年、工学の分野では初期値依存性の強い非線形最適化問題の解法として、遺伝的アルゴリズム、セルオートマトン、擬似焼きなまし法に代表される発見的的手法(Heuristic Method)が応用されている⁷⁾。例えば三井、登坂は解の候補を複数設ける多点探索の一つである遺伝的アルゴリズムを用いて、極小曲面を探索している⁸⁾。文献 8)の解析結果に関して、複数の極小曲面が存在しているか、また面積最小の形状が得られているかは明確に述べられていない。

本論文では、発見的手法で解の候補を1つ設ける単点探索である擬似焼きなまし法を適用した面積最小の極小曲面を探索するアルゴリズムを提示する。また、数値解析を通して提示したアルゴリズムの有効性を検証する。

2. 擬似焼きなまし法⁷⁾

擬似焼きなまし法 (Simulated Annealing) は、加熱した金属の冷却過程を模擬した手法で、[状態生成]→[状態変化]→[徐冷]の3段階の基本プロセスで解を探索する。この手法の特徴は、解探索に確率的ゆらぎを導入し、そのゆらぎを温度と呼ばれる変数で制御することで、局所最適解への収束を回避し、大域的最適解を求める点にある。図1に擬似焼きなまし法概念図を示す。

状態生成では近傍に解の候補 (設計変数の値) を無作為に設定する。本論で設計変数は膜面の座標である。次の状態変化の過程では、設定した設計変数の評価を行う。図1に示す A_1, A_2 の点に初期値を設定した最小化問題の場合、降下法を用いると最寄りの極小解 (図1中の B_1, B_2) が得られる。大域的最適解 (最小解、図1の点 D) を得るためには、何らかの方法で D に至るまでの極大点 (図1中の C_1, C_2) を越える必要がある。擬似焼きなまし法では、最小解までの極大点を乗り越えるために以下の方策を講じる。設計変数の評価 (ΔE : 本論では膜面積の変化量) が良ければ ($\Delta E < 0$)、設定した値を暫定解として更新する。一方、設定値の評価が悪くとも ($\Delta E > 0$)、置換確率

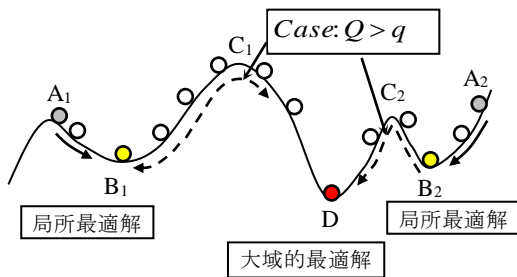


図1 擬似焼きなまし法概念

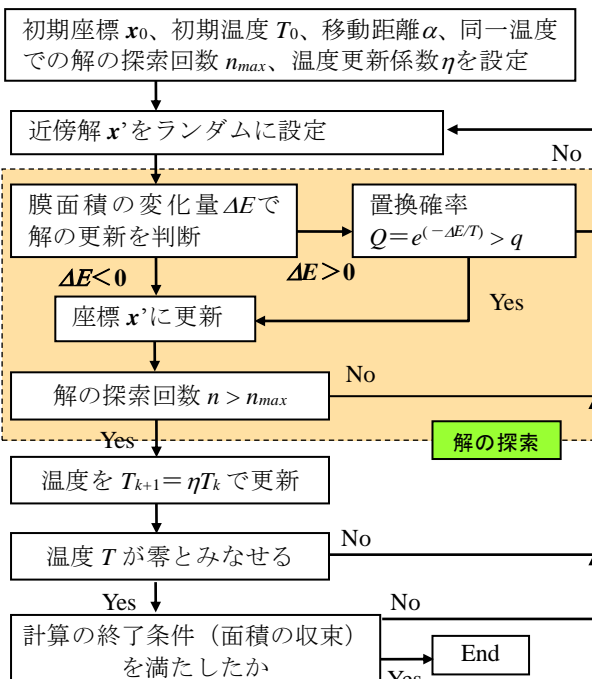


図2 擬似焼きなまし法による極小曲面の探索アルゴリズム⁹⁾

Q が(5)式を満たすとき、解を更新する。

$$1 \geq Q = e^{-\frac{\Delta E}{T}} > q, \quad q: 0 \sim 1.0 \text{ の乱数} \quad (5)$$

ここに T は正の変数で、加熱後の温度に対応する。温度 T が高いときは置換確率 Q が高い値となり、 $\Delta E > 0$ でも解が更新され易い。 $\Delta E > 0, Q > q$ の条件から設計変数が更新されるプロセスが、図1の破線矢印が示す大域的最適解までの極大値を越えるための戦略である。ここまでの解探索プロセスを設計変数の広い範囲で実施する目的で、同一温度で設定した探索回数まで繰り返す。

広範囲まで解の探索を行った後、変数の移動を次第に落ち着かせ、大域的最適解への収束を図る。この過程は基本プロセスの徐冷に相当し、温度を低下させて置換確率を低くする。擬似焼きなまし法は、無限回の状態変化により大域的最適解が得られることが保証されている。無限回の更新は現実的でないため、温度 T の管理方法として、(6a)式の数値型アニーリングと(6b)式の指数型アニーリングが用いられている。対数型アニーリングは指数型アニーリングと比較して温度低下が緩慢であり、最適化に時間を要する。本論では(6b)式の指数型アニーリングを採用した。ここに η は温度更新係数と呼ばれる制御パラメータであり、 $0.8 \leq \eta < 1.0$ の値が用いられている。

$$T_{n+1} = T_n / \log n, \quad T_{n+1} = \eta T_n \quad (6a, b)$$

大域的最適解への収束の判定は、温度が零と見なせるまで低下し、且つ座標を指定した回数まで更新しても面積が小さくなることがない場合、収束したと判断し、計算を終了する。図2に擬似焼きなまし法を用いた極小曲面の探索アルゴリズム⁹⁾を示す。

3. 極小曲面の数値解析

2章で述べた探索アルゴリズムの有効性を検証するために、代表的な極小曲面の数値解析例題を示す。

3.1 回転懸垂曲面

回転懸垂曲面 (Catenoid) とは、懸垂線のある軸回りに回転してできる回転曲面である。この曲面は2つの円を、円の半径に対して1.325487倍以下の距離に平行配置したときにできる極小曲面であり、安定解と不安定解が存在する。安定解のときに面積最小、不安定解のときに面積が極大となる。

解析対象の形状と解析制御パラメータを図3に示す。解析モデルは文献5)に倣い、初期形状を円周方向に24分割、高さ方向に10分割し、三角形要素でモデル化した。初期形状は円筒 (図4(a)) と不安定解近傍の $r=0.3$ とする回転懸垂曲面 (図4(b)) の2種類である。なお、解析領域は x - y 平面では対称条件として1/4のみ、 z 方向は対称条件を与えず $0 \leq z \leq L=1.0$ とする。初期形状の設定に依存せず、面積最小曲面 (大域最適解) に収束することを確認する。各節点は x - y 平面内で半径方向にのみ移動

し、 z 方向には移動しないとする。

3.1.1 初期形状が安定解近傍の円筒の場合

図 5 に収束形状を示す。初期形状が安定解近傍にある場合の数値解(Num.)は厳密解¹⁰⁾と良く対応している。

次に図 3 に示した解析制御パラメータを基準とし、パラメータの設定が解析結果に及ぼす影響を検討する。パ

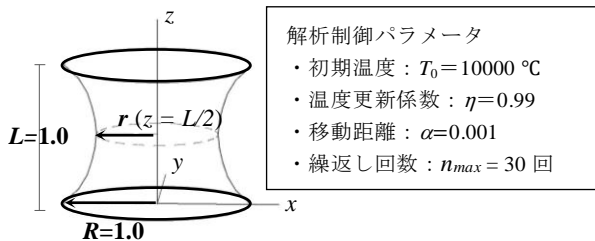
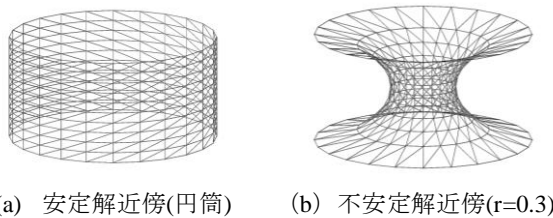
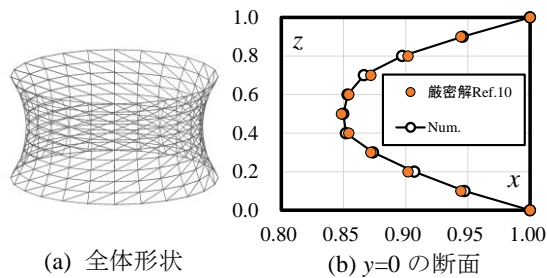


図 3 回転懸垂曲面と解析制御パラメータ



(a) 安定解近傍(円筒) (b) 不安定解近傍(r=0.3)

図 4 初期形状



(a) 全体形状

(b) $y=0$ の断面

図 5 収束形状 (初期形状: 図 4(a))

表 1 解析制御パラメータ (初期形状: 図 4(a))

		T_0	η	α	n_{max}
basis		10000	0.99	0.001	30
A	A1	2000	0.99	0.001	30
	A2	500	0.99	0.001	30
B	B1	10000	0.97	0.001	30
	B2	10000	0.95	0.001	30
C	C1	10000	0.99	0.1	30
	C2	10000	0.99	0.05	30
D	D1	10000	0.99	0.001	15
	D2	10000	0.99	0.001	5

表 2 解析制御パラメータ (初期形状: 図 4(b))

		T_0	η	α	n_{max}	Ani_{max}
basis		10000	0.99	0.001	30	1
E		10000	0.99	0.001	10	1
F		10000	0.99	0.001	10	2
G		2000	0.95	0.01	5	1

ラメータは初期温度 T_0 、温度更新係数 η 、移動距離 α 、探索回数 n_{max} の 4 つである。パラメータの設定を表 1 に示す。"basis"は図 3 に示した解析制御パラメータを意味する。本論中の収束判定の更新回数は 50 回とした。

図 6 は収束時の $y=0$ の断面である。初期温度 T_0 と温度更新係数 η の大きさは、温度低下を管理するパラメータである。A1,A2,B1,B2 の設定値では basis より早く温度が低下するが、図 6(a),(b)より収束形状に大きな違いは見られない。図 6(c)より移動距離 α が大きいと収束が悪く、結果に誤差が生じやすい。移動距離は最適化に大きく影響する。図 6(d)より探索回数 n_{max} が少ないと、 $z=L/2$ の位置で誤差が生じやすい。

3.1.2 初期形状が不安定解近傍の場合

次に初期形状が安定解から離れ、不安定解近傍にある図 4(b)の場合の解析結果を示す。解析制御パラメータの設定を表 2 に示す。 Ani_{max} はアニーリングの回数を意味する。 $Ani_{max}=2$ の F は一度温度がほぼ零となり形状が収束した後、再度アニーリングを行っている。図 7 に収束時の $y=0$ の断面形状を示す。basis の制御では、不安定解の近くに初期形状を設定しても、大域的最適解に収束している。探索回数を 10 回とした制御 E との比較から、この問題では大域的最適解を得るために探索回数 n_{max} は 30 回で十分であったと考えられる。探索回数を 10 回とした E では不安定解と安定解とのほぼ中間の位置で収束した。解の探索を十分行えないパラメータの設定である G では、不安定解に収束してしまう。探索回数が 10 回であるが再アニーリングを実施した F は、初期形状が離れていても安定解へ収束し得た。図 8 は表面積の推移である。矢印の位置で再アニーリングを開始した F は、より表面積が小さい形状を探索している。図 9 に設定 F での形状変化と表面積を示す。図 8 中に示した▼は図 9 に示した各図の step である。温度が高い 1200, 2700 step では (5)式に示す置換確率が高く、表面積が増加する形状も許容するため、不規則な形状を示す。

以上の回転懸垂曲面に対する極小曲面の探索解析の結果から、擬似焼きなまし法を用いて面積最小の極小曲面形状が得られることを確認した。

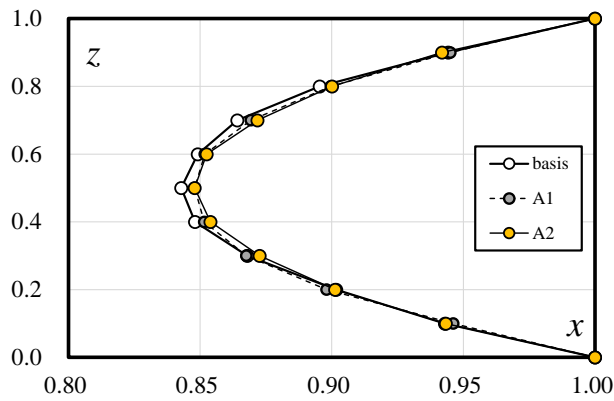
3.2 Wiener-Douglas 問題

この問題は平行な 2 つの円とその一部を垂線で繋いだ境界に張られる極小曲面を求める問題であり、図 10 に示す $\phi=5\pi/6$, $L/R=1.5$ のとき、極小曲面が 3 個 (2 つの安定解と 1 つの不安定解) 生じることから解の多峰性をもつ問題である。文献 5)同様に解析モデルは円周方向に 20 分割、高さ方向は 10 分割とした。解析領域は x - y 平面の $1/2$ で、 z 方向は対称条件を与えていない。初期形状は図 11 に示す円筒状の形である。設定した解析制御パラメータを表 3 に示す。なお、文献 5)との比較のために各節点の移動は文献 5)の図 11 に示す x - y 平面内での方向余弦方

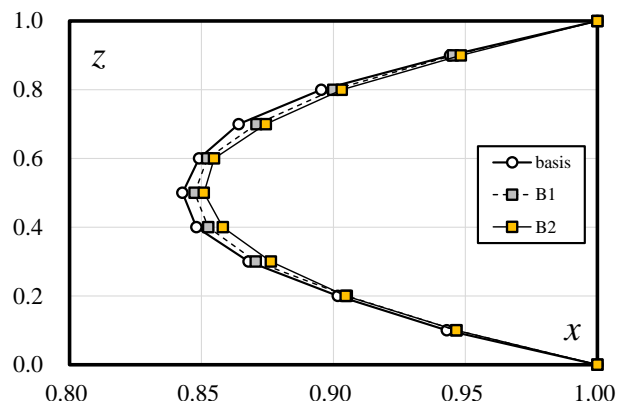
向のみとした。

解析結果を図 12 に示す。Case-1 では安定解 1 (局所最適解) に捕捉されてしまったが、再アニーリングを 2 回行った Case-2 では局所最適解である安定解 1 を脱出し、かつ安定解 1 と安定解 2 の間に存在する不安定解を越えて最小面積の安定解 2 の近傍に収束した。図 13 は Case-1, Case-2 の収束形状である。個々の収束形状は文献 5) の安定解形状と酷似している。また、本解析結果の鞍点の座標 ($x=0.866$ からの距離) は安定解 1 で $H=1.228$ であり、文献 4) と文献 5) の数値解 $H=1.243$ よりやや小さい。一方の安定解 2 では $H=0.266$ であり、文献 4) で $H=0.262$

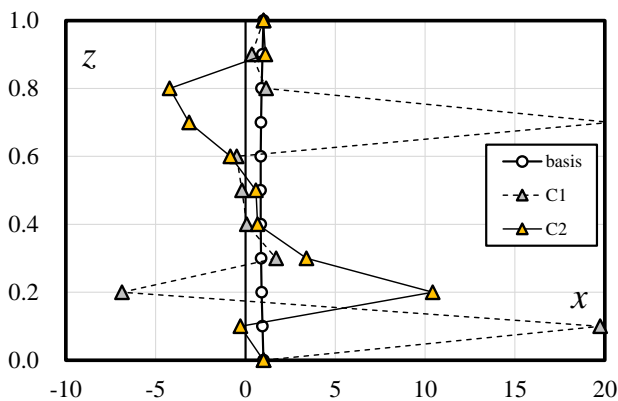
と文献 5) の $H=0.274$ の間の値にある。表面積は Case-1 で 7.074、Case-2 で 7.07 とわずかに安定解 2 の面積が小さくなる。文献 4) の結果は 7.026 である。以上の結果から、本解析結果は文献 4), 5) と良く対応した値が得られている。なお本手法は、面積汎関数の停留という極小曲面の条件を支配方程式とする合目的な解法ではなく、ランダムに節点を移動させ、曲面 (多角形の集合体として近似) の面積がより小さくなる形状を探索する試行錯誤型の解法である。文献 5) の解析結果との差は、(a) 極小曲面方程式を解いていない、(b) 解析領域を z 方向に対称条件を設けていないためと考えられる。



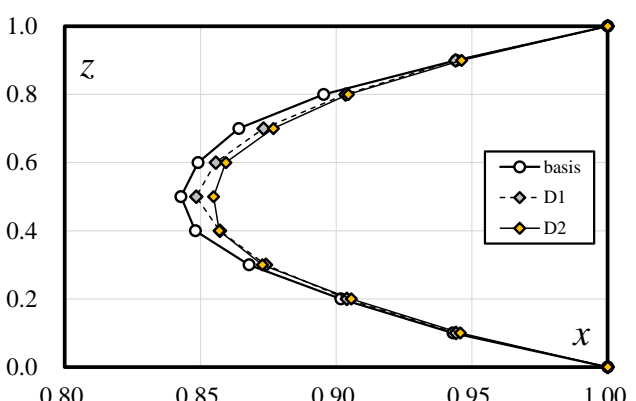
(a) 初期温度による影響



(b) 温度更新係数による影響



(c) 移動距離による影響



(d) 探索回数による影響

図 6 パラメータの設定による収束形状の差 ($y=0$ の断面 初期形状: 円筒)

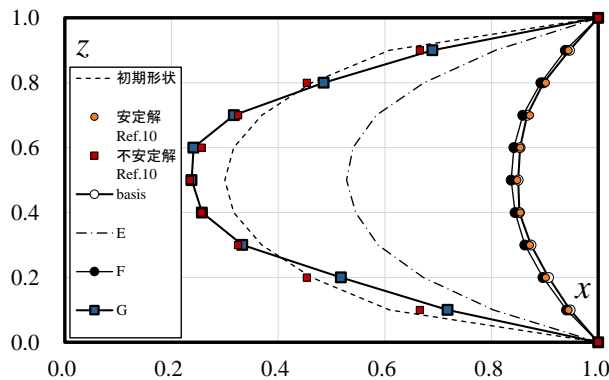


図 7 パラメータの設定による収束形状の差 ($y=0$ の断面 初期形状: 不安定解近傍)

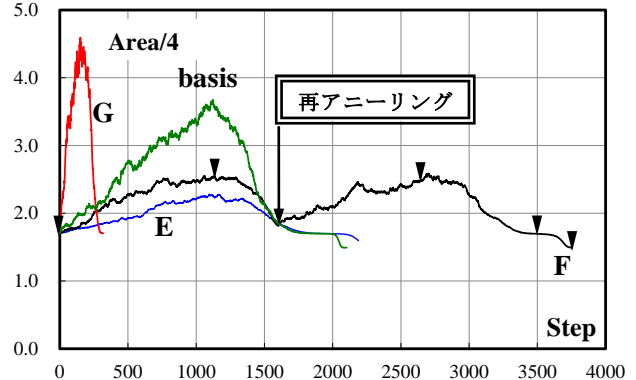


図 8 パラメータの設定による表面積の推移 (初期形状: 不安定解近傍)

4. 結論

本論では、解探索に確率的ゆらぎを導入した擬似焼きなまし法を用いて膜曲面の極小曲面を探索するアルゴリズムを提示した。同一境界に対して異なる極小曲面を張る回転懸垂曲面と Wiener-Douglas 問題の極小曲面解析を実施し、以下の事項を確認した。

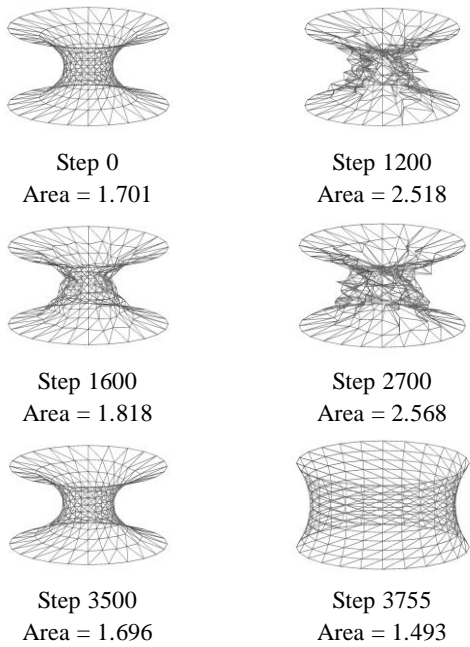


図9 設定Fのときの形状変化と表面積 (初期形状：不安定解近傍)

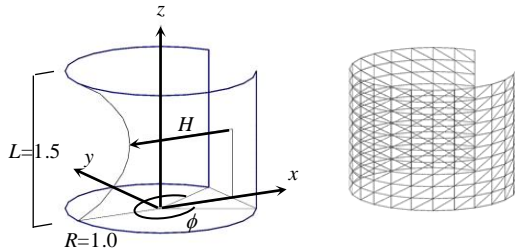


図10 解析モデル

図11 初期形状

表3 解析制御パラメータ (初期形状：図11)

	T_0	η	α	n_{max}	$Animax$
Case-1	100000	0.995	0.0025	50	1
Case-2	1回目:40000	0.995	0.005	50	3
	2回目:20000				
	3回目:200				

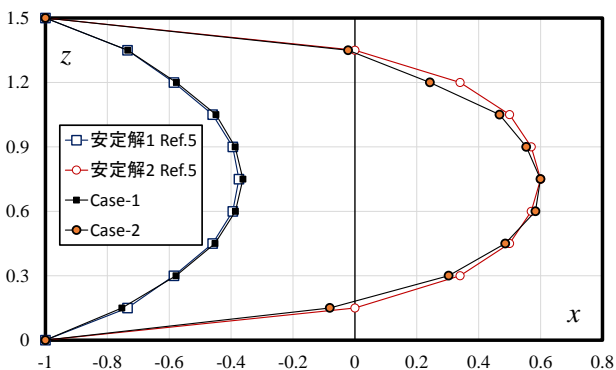
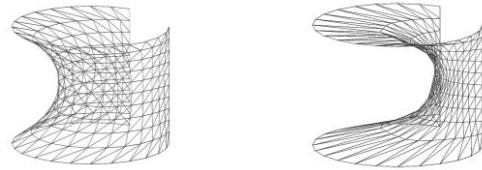


図12 $y=0$ の断面



安定解1
Area = 7.074

安定解2
Area = 7.07

図13 収束形状

- [1] 初期温度、温度更新係数、変数の移動距離、探索回数という解析制御パラメータを適切に設定することで、大域的最適解である最小面積の曲面形状が得られる。
- [2] 解探索の回数が不十分な場合でも、再アニーリングにより最小面積曲面が得られる場合があることを例証した。
- [3] 擬似焼きなまし法を適用した本アルゴリズムは、極小曲面を探索するという初期値依存性の高い問題に対しても有効である。

謝辞

本論中の解析に協力していただいた金沢工業大学建築学科卒業生 小西康司氏に感謝の意を表します。

[参考文献]

- 1) 石井一夫：膜構造の形状解析の思い，社団法人 日本膜構造協会，膜構造技術ニュース，No.3, p.11, 2005.2.
- 2) 大森博司：設計用原型曲面の形態解析，生産研究，47 巻，1 号，pp.18-19, 1995.1.
- 3) 小磯深幸：プラトール問題と最近の発展，数学セミナー，pp.37-43, 2010.1.
- 4) Hinata, M., Shimasaki, M. and Kiyono, T.: Numerical Solution of Plateau's Problem by a Finite Element Method, Mathematics of Computation, Vol., No.125, pp.45-60, 1974.1.
- 5) 鈴木俊夫，半谷裕彦：極小曲面の変数低減による有限要素解析，日本建築学会構造系論文報告集，第 425 号，pp.111-120, 1991.7.
- 6) 石原鏡，八木孝憲，萩原伸幸，大森博司：極小曲面解析による膜構造の形状解析 複合変分関数を用いて，日本建築学会構造系論文集，第 469 号，pp.61-70, 1995.3.
- 7) 三井和男，大崎純，大森博司，田川浩，本間俊雄：発見的最適化手法による構造のフォルムとシステム 3. シミュレーテッドアニーリング，コロナ社，pp.69-94, 2004.7.
- 8) 三井和男，登坂宣好：遺伝的アルゴリズムの空間構造形態解析への応用，日本建築学会構造系論文集，第 484 号，pp.75-83, 1996.6.
- 9) 西村督：シミュレーテッドアニーリングを用いた極小曲面探索法，日本建築学会大会学術講演梗概集，B-1 分冊，pp.805-806, 2012.9.
- 10) 大森博司，萩原伸幸，松井徹哉，松岡理：有限要素法による極小曲面の数値解析，膜構造研究論文集，pp.1-10, 1988.

*1 金沢工業大学建築学科 教授 博士 (学術)

*2 金沢工業大学大学院 工学研究科博士前期課程

A Method for Finding Minimal Surfaces of Membranes Using Simulated Annealing

Toku NISHIMURA^{*1}
○Ikumi YAMANAKA^{*2}

Keywords : Membrane Structure, Minimal Surface, Global Optimal Solution, Simulated Annealing

In membrane structure design, generally uniform stress surfaces are recommended as the design prototype surface. Neglecting gravity, *Minimal surfaces* are equivalent to the uniform stress surfaces. The surfaces are whose surface area are minimum among surfaces which spans a given boundary closed curves. Their average curvatures are equal to zero.

The problem, which examines properties of minimal surfaces, is called *Plateau problem*. The Plateau problem has highly non-linearity. Therefore we cannot solve the problem analytically to arbitrary boundary conditions. In practice, it needs to get approximated solution by a numerical method. The plateau problem usually implies the multi-valued boundary-value problem. We have to give care to initial value dependence. Especially using the decent method, we often encounter local optimal solutions. To avoid the local optimum solutions and to find global optimal solution, we utilize simulated annealing. This method is a stochastic local search and the one of heuristic method.

In this paper, we propose a computational method to find minimal surfaces using simulated annealing. The essential features of proposed method and numerical results are shown as follows:

- (1) This method is not mathematically purposive but based on trial and error at random.
- (2) As long as giving control parameters, such as initial temperature, the update coefficient of temperature, movement of solution and number of iteration, appropriately, it is possible to find minimal surfaces.
- (3) It is shown that if the number of searching is not adequate, re-annealing may lead to the minimal surface.
- (4) The application of simulated annealing is effective in the problems with initial value dependence.
- (5) The representative numerical examples, such as catenoid and Wiener- Douglas problem (Courant's example), show the effectiveness of the proposed method.

*1 Professor, Department of Architecture, Kanazawa Institute of Technology, Ph. D.

*2 Graduate Student, Graduate School of Engineering, Kanazawa Institute of Technology