修正 PSO によるトラス構造物の高次元最適化
離散設計変数を用いた最小重量設計

○菅谷　明誉*1
曽我部　博之*2

キーワード：粒子群最適化　高次元問題　多峰性関数　構造最適化　最小重量設計　離散設計変数

1. はじめに

粒子群最適化(PSO：Particle Swarm Optimization)[1] は，鳥や魚などの集団行動から発想を得て創られた群知能である．PSO はアルゴリズムが非常に単純であることや目的関数の勾配情報が不要であることなどから様々な工学分野で応用されている．しかし，目的関数が多峰性あるいは高次元となる問題においては，その探索性能の低下が指摘されている．

近年ではシステムの複雑化や大規模化の傾向にあり，最適化問題においても設計変数の高次元化について検討され始め，いくつかの良好な最適化手法が提案されている[2,3]．筆者等も高次元最適化問題や多峰性関数に対して高い性能を発揮する修正 PSO (mPSO：modified PSO)[4] を提案した．この手法を実在する体育館の屋根トラスを対象とした高次元最適化問題に適用し，その有効性を示してきた[5,6]．

ところで，通常の PSO では設計変数を連続量として扱うが，建築構造物を構成する柱，はりなどの部材は，既製品を用いることが一般的であるため，設計変数を離散値として扱う必要がある．このような離散問題に対応した PSO（DPSO：Discrete PSO）については，様々な手法が提案されているが[7,8]，本報では離散問題に適用できる mPSO を提案し，その有効性についての報告する．

2. 最適化手法

2.1 mPSO のアルゴリズム

初めに mPSO の計算手順について述べる．群れを構成する粒子 i は，速度ベクトルv^i_jと位置ベクトルx^i_j，そして評価値E^iの 3 つの情報を持っている．粒子の速度ベクトルと位置ベクトルは，次の 2 つの式を用いて更新する．

$$v^i_j(t+1) = wv^i_j(t) + cr^i(t)\{p^i_j(t) + g_j(t) - 2x^i_j(t)\} \tag{1}$$

$$x^i_j(t+1) = x^i_j(t) + v^i_j(t+1) \tag{2}$$

ここで，$x^i_j(t)$はステップ t における粒子 i(=1〜m)の位置ベクトルの j(=1〜n)成分で，$v^i_j(t)$は速度ベクトルである．$p^i_j(t)$はステップ t までの粒子 i 自身の最良解を表し，$g_j(t)$は群れの中での最良解を表す．最良解とは目的関数の最も良い粒子に対する位置ベクトルのことである．さらに w, c は重みを表すパラメータで，$r^i(t)$は区間[-1, 1]の一様乱数である．なお，速度ベクトルの初期値は次式で与える．

$$v^i_j(0) = (-1)^i \frac{2(c+1)}{w} \tag{3}$$

さらに, 位置ベクトルの初期値 $x^i_j(0)$は一様乱数によって与える．式(1)及び(2)を最大反復回数t_{max}まで繰り返したときの$g_j(t_{max})$が与えられた問題の最適解となる．

2.2 離散設計変数の取り扱い方

位置ベクトルの領域 [-1,1] を s 等分し，その分割された小領域に昇順で番号を付ける．これを設計変数の順番号にすれば，次式によって連続値の位置ベクトルx^i_jは，設計変数の順番号h^i_j(=1〜s) に変換することができる．

$$h^i_j = \begin{cases} [s(x^i_j+1)/2]+1 & for \;\; -1 \le x^i_j < 1 \\ s & for \;\; x^i_j = 1 \end{cases} \tag{4}$$

ここで，［ ］はガウス記号である．このように離散問題に適用できる PSO を本報では DmPSO (Discrete modified PSO)と呼ぶ．

3. ベンチマークによる検証

3.1 ベンチマーク問題

DmPSO の探索性能を以下に示すベンチマーク問題で検証する．比較の対象は mPSO，PSO，SGA(Simple GA)[9]とする．

① Rastrigin 関数

min.　$f_{1(x)} = 10n + \sum_{j=1}^{n}(x_j{}^2 - 10\cos(2\pi x_j))$

subject to　$-5.12 \le x_j \le 5.12$

大域的最適解$\boldsymbol{x}^* = (0,\dots,0)$,　$f_{1(x^*)} = 0$

② Rosenbrock 関数

min.　$f_{2(x)} = \sum_{j=1}^{n-1}\left\{100\left(x_j{}^2 - x_{j+1}\right)^2 + \left(1-x_j\right)^2\right\}$

subject to　$-2.048 \le x_j \le 2.048$

大域的最適解$\boldsymbol{x}^* = (1,\dots,1)$,　$f_{2(x^*)} = 0$

3.2 数値実験の結果

図 1 は，次元 n 毎に 100 回の試行計算を行い，そこでの評価値の平均 mean(f)を示したもので，従来の PSO ($c_1 = c_2 = 1.5, w = 0.7$)，DmPSO，mPSO($c = 1.0$，$w =$ 0.7)及び SGA を比較したものである．PSO の粒子数は m=20，SGA の個体数は 20 とし，最大ステップ数をt_{max} ＝1000 とした．ここで，SGA のビット数は 8 ビット，DmPSO の解候補は 256(=2^8)とした．

Rastrigin 関数では，DmPSO の探索性能が設計変数を連続値とした mPSO に比べて劣るものの，PSO や SGA に比べて非常に優れていることがわかる．さらに，Rosenbrock 関数では， DmPSO の探索性能が mPSO と同程度で，他の 2 つの方法に比べて非常に有効であることがわかる．

4. 立体トラスの最小重量設計

4.1 建物概要

最適化の対象は，図 2 に示すような某体育館の屋根トラス（重量w_o）とする．応力分布の対称性や境界条件を考慮し，図 3 に示すような構造モデル（設計変数$n = 324$）で最適化を実施する．使用する部材は全て ss400 の鋼管で，表 1 に示す部材リストを用いる．荷重は鉛直荷重$1.13\mathrm{kN/m^2}$と各部材の自重とし，上弦材節点に作用される．

4.2 最適化問題の定式化

トラスの最小重量設計は，次のように定式化した．

$$\text{min.} \qquad f(x) = \frac{1}{w_o}\sum_{j=1}^{n} \rho x_j l_j \tag{5}$$

$$\text{subject to} \qquad \begin{cases} \sigma_j \le f_t \\ \sigma_j \le f_c \end{cases} \tag{6}$$

ここで，ρは鋼材の密度，x_jは部材 j の断面積，l_jは部材 j の部材長，σ_jは部材 j の応力度，f_tは引張の許容応力度，f_cは圧縮の許容応力度である．

さらに，各部材の許容応力度は次のように設定した．

$$f_t = 156\ \mathrm{N/mm^2} \tag{7}$$

$$f_c = \begin{cases} \dfrac{\left\{1 - 0.4\left(\dfrac{\lambda}{\Lambda}\right)^2\right\}F}{\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\lambda}{\Lambda}\right)^2} & for \quad \lambda \le \Lambda \\ \dfrac{0.277F}{\left(\dfrac{\lambda}{\Lambda}\right)^2} & for \quad \lambda > \Lambda \end{cases} \tag{8}$$

ここで，$\Lambda\left(= \sqrt{\pi^2 E/0.6F}\right)$は限界細長比，$\lambda(= l_k/i_r)$ は細長比，l_kは座屈長さ，i_rは断面二次半径， E はヤング係数，F は基準強度である．設計は短期で行うため上式で求めた許容応力度を 1.5 倍にした．各粒子の評価値E^iは，目的関数とペナルティ関数の和として次のように与えた．

$$E^i = f(x) + c\gamma \tag{9}$$

ここで，c は定数，γは許容応力度を超えた部材数である．

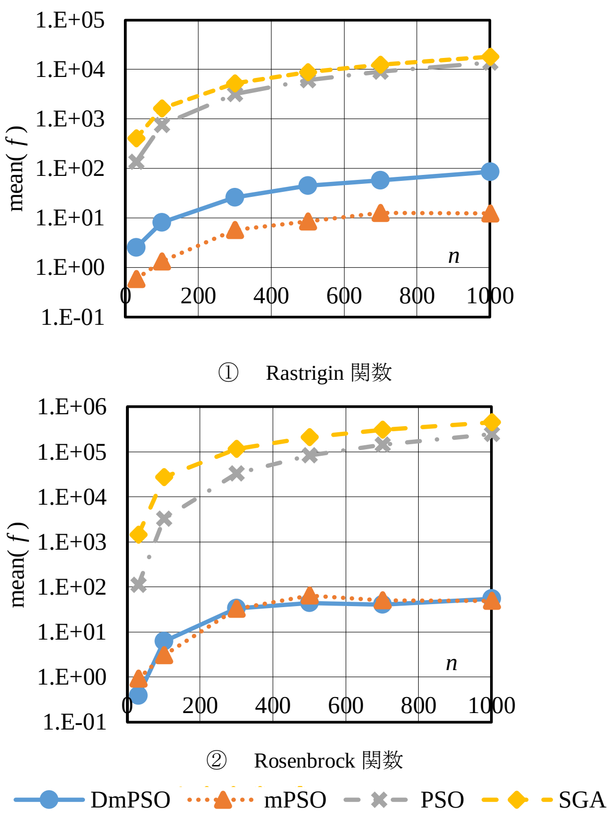

図 1　探索性能の比較

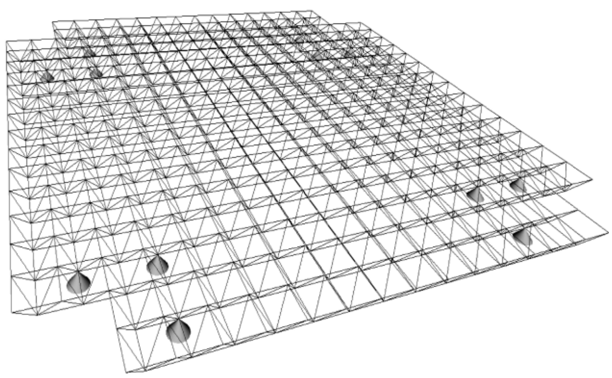

図 2　全体パース

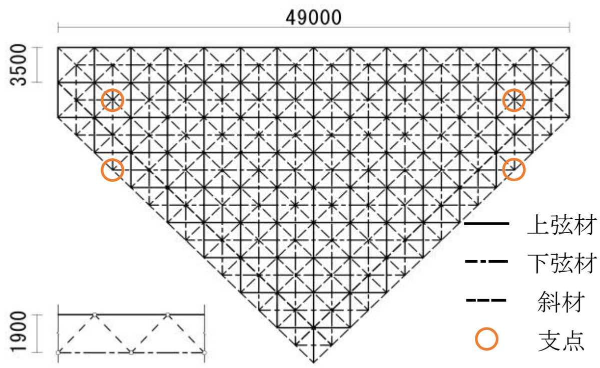

図 3　構造モデル

表 1　部材リスト

番号	外径[mm]	板厚[mm]	断面積[mm^2]	番号	外径[mm]	板厚[mm]	断面積[mm^2]	番号	外径[mm]	板厚[mm]	断面積[mm^2]
1	21.7	2	123.8	13	76.3	2.8	646.5	25	114.3	4.5	1552
2	27.2	2	158.3	14	60.5	4	710	26	139.8	4	1707
3	27.2	2.3	179.9	15	76.3	3.2	734.9	27	139.8	4.5	1913
4	34	2.3	229.1	16	89.1	2.8	759.1	28	165.2	4.5	2272
5	42.7	2.3	291.9	17	89.1	3.2	863.6	29	165.2	5	2516
6	42.7	2.5	315.7	18	76.3	4	908.5	30	139.8	6	2522
7	48.6	2.3	334.5	19	101.6	3.2	989.2	31	190.7	4.5	2632
8	48.6	2.5	362.1	20	114.3	3.2	1117	32	216.3	4.5	2994
9	48.6	2.8	402.9	21	114.3	3.5	1218	33	165.2	6	3001
10	60.5	2.3	420.5	22	101.6	4	1226	34	190.7	5.3	3087
11	48.6	3.2	456.4	23	101.6	5	1517	35	190.7	6	3482
12	60.5	3.2	576	24	139.8	3.6	1540	36	165.2	7.1	3526

4.3　計算結果

DmPSO のパラメータを c =1.0, w =0.7 とし，粒子数 m= 100，最大ステップ数t_{max} = 1000とした．表 2 は 20 回の試行計算を行い，評価値に関する統計量を示したものである．図 4 に今回の最適解における各部材の応力度の達成度を示す．ここでの達成度とは，応力度が許容応力度に対してどの程度達しているかという意味である．また相対度数は引張材と圧縮材のそれぞれに対して示している．さらに，図 5 は部材断面の分布を示したもので，断面積の比に基づいて部材の太さを表した．DmPSO の探索性能は，ばらつきが大きいものの最大で 2 割程度の重量を削減することができた．しかし，応力度の達成度が圧縮材，引張材共に未だ低いことから，更なる軽量化が可能である．

4.4　多段階最適化の追加

建築構造物の高次元最適化に当たっては，評価値の計算時間が大幅に増加することが問題となる．そのため，従来の最適化よりさらに効率的に解を探索する多段階最適化について考える．

表 2　評価値に関する統計量

平均	最良値	最悪値	標準偏差
8.23.E-01	7.58.E-01	9.60.E-01	5.05.E-02

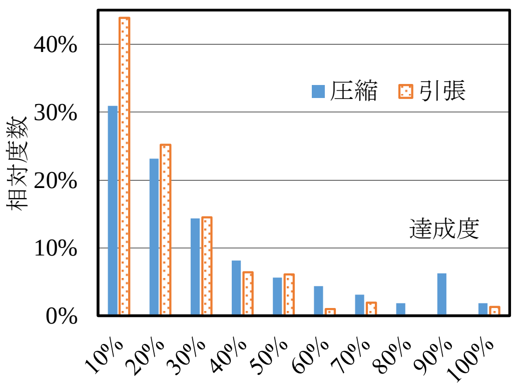

図 4　各部材の応力の達成度

表 3　多段階最適化における評価値に関する統計量

p	平均	最良値	最悪値	標準偏差
199	5.94.E-01	5.38.E-01	6.77.E-01	3.86.E-02
99	5.44.E-01	4.96.E-01	6.06.E-01	3.38.E-02
19	6.07.E-01	5.22.E-01	7.30.E-01	6.15.E-02
9	6.42.E-01	5.73.E-01	7.39.E-01	3.67.E-02
1	7.76.E-01	7.04.E-01	8.65.E-01	5.39.E-02

(1)　定義域の更新方法

初期段階における位置ベクトルの定義域を [-1,1]とし，反復回数t_{max}まで解探索を行う．解探索が終了したらその時点での最適解x_j^*を各設計変数の定義域の上限，すなわち定義域は[-1, x_j^*]とする．ここで，x_j^*は最適解トラスの j 次元成分である．このような操作を既定の更新回数 p だけ行い，最終的に得られた最良解が問題の最適解となる．

(2)　計算結果

ここでは定義域の更新回数 p が DmPSO の探索性能に与える影響について検討する．粒子数 m=100 をとし，評価値の総計算回数を 10 万回とした．多段階最適化を行った場合の評価値の統計量を表 3 に，収束状況を図 6 に示す．多段階最適化を行うことによって，DmPSO の探索性能が向上していることがわかる．図中の p=0 は 前節で示した多段階最適化を行わない場合の収束状況である．

定義域の更新回数を多くする程，解探索の終盤でも活発な解更新が行われるが，更新回数を p=199 と極端に多くすると，探索性能は低下してしまう．この例では更新回数 p=99 としたときに最も小さい最適解が得られている．この場合の応力の達成度を図 7，断面分布を図 8 に示す．

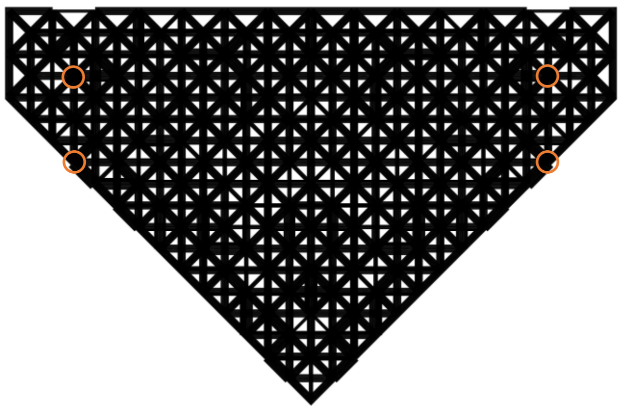

図 5　断面積分布

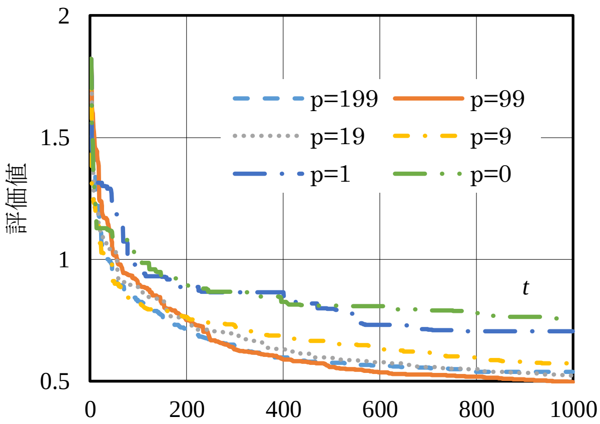

図 6　多段階最適化の収束状況

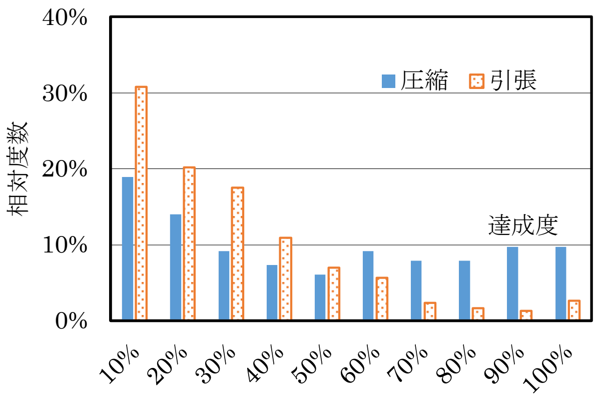

図 7　多段階最適化後の応力の達成度

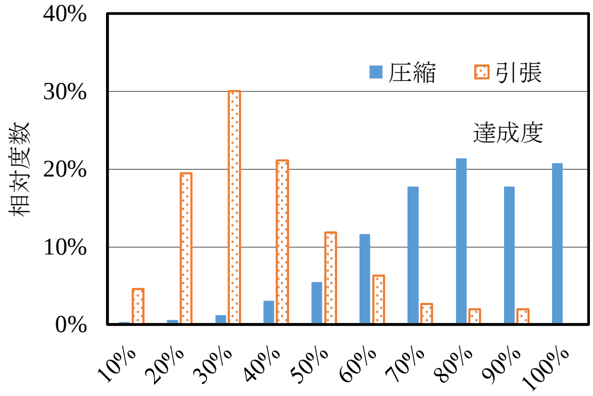

図 9　山登り法後の応力の達成度

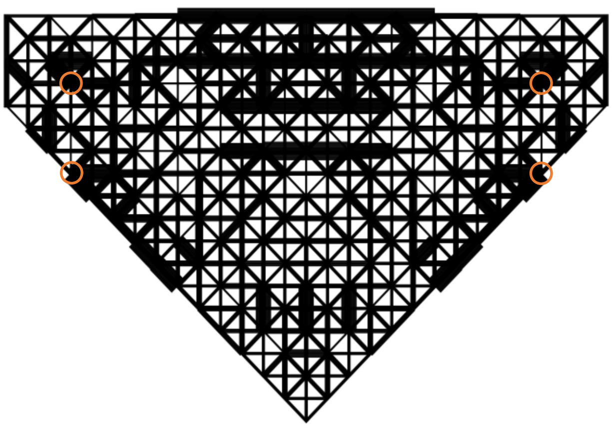

図 8　多段階最適化後の断面積分布

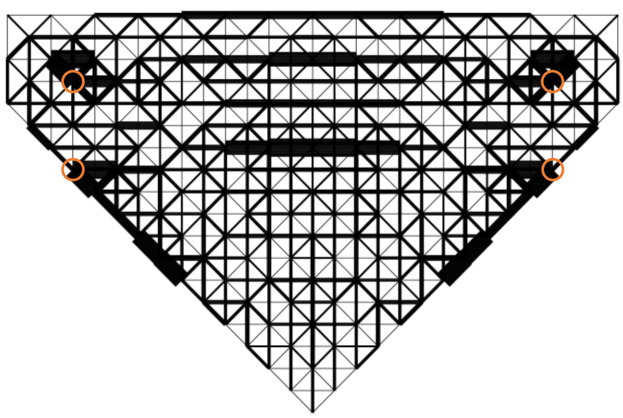

図 10　山登り法後の断面積分布

4.5　山登り法の追加

ここでは局所探索法である山登り法[6]を用いて多段階最適化で得られた最良解の局所探索を行う．また，設計変数の離散化法については 2.2 節と同じである．山登り法におけるパラメータは， 近傍解数 20， 反復回数 10, 定義域の更新回数 99 とした． 図 9 に得られた最適解における応力の達成度を示す．山登り法によって圧縮材の達成度が顕著に上がっている． 図 10 はトラス部材の断面分布を示す．支点周辺とたわみが大きい部分に部材が集中しているのがわかる．

5.　おわりに

本報では，設計変数が離散値となる最適化問題に対応した DmPSO を提案し，いくつかのベンチマーク問題に適用して，その探索性能が非常に高いことを確認した．さらに，実在する体育館の屋根トラスに DmPSO を適用することによって，高次元離散設計変数の構造最適化問題にも有効であることが確認された．

[参考文献]

1) J. Kennedy and R.C. Eberhart : “Particle Swarm Optimization”, IEEE International Conf. on Neural Networks, pp.1942- 1948, 1995.

2) 宇谷明秀，長島淳也，牛膓隆太，山本尚生：Artificial Bee Colony(ABC)アルゴリズムの高次元問題に対する解探索性能の強化, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J94－D　No.2, 2011.2

3) 渡邊恭成，小島理孝，中野秀洋，宮内新：高次元最適化問題のための部分更新型 PSO，電子情報通信学会技術研究報告. NLP，非線形問題 113(116) 5-9，2013.7

4) 曽我部博之：PSO における探索性能の向上に関する検討，計算工学講演会論文集，Vol.19，2014.6

5) 菅谷明誉,曽我部博之：修正 PSO によるトラス構造物の最小重量設計,第 37 回情報・システム・利用・技術シンポジウム論文集,2014.12

6) 菅谷明誉,曽我部博之：修正 PSO と山登り法による立体トラス構造物の多段階最適化，日本建築学会大会学術講演梗概集（関東），pp.317-318，2015.8

7) 江本久雄，別府万寿博，中村秀明，宮本文穂：複数の準最適解を探索可能な DPSO の提案と衝撃荷重を受ける RC 版の最適設計，土木学会論文集 F，Vol.62 No.3 419-432，2006.7

8) 北山哲士，荒川雅生，山崎光悦：Particle Swarm Optimization の基礎的検討と混合変数問題への適用，日本機械学会論文集 (A 編) 71 巻 706 号，2005.6

9) Goldberg,D.E : Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, Addison-Wesley, 1989.

＊1　愛知工業大学大学院　工学研究科　博士前期課程
＊2　愛知工業大学　工学部　建築学科　教授　工博