

極限解析による任意方向ヒンジを有する部分剛接合骨組の形態変化機構設計法

○大崎 純*¹ 宮津裕次*²
津田勢太*³ 友田晴次*⁴

キーワード：メカニズム，形態変化機構，極限解析，骨組

1. はじめに

建築の展開構造で用いられる形態変化機構のほとんどは、幾何学的な解析的表現で機構条件を導いて設計される[1]。一方、機械工学の分野でのメカニズムに関しては、最適化手法を用いた数値解析による手法が提案されている[2]。それらの研究のほとんどは平面機構を対象としているが、立体機構を実現するためには、3軸周りに回転可能なピン接合の製作は困難であるため、1軸あるいは2軸まわりに回転可能な部分剛接合された構造とするのが望ましい。

著者らは、極限解析問題に類似の線形計画問題を解いて、メカニズムを求める方法を提案した[3,4]。しかし、その方法では、ヒンジの方向を局所座標まわりの回転に限定していた。

本研究では、2次計画問題として定式化される極限解析問題を解いて、任意の方向のヒンジを有する展開機構を生成する手法を提案する。

2. 手法の概要と局所座標の定義

外力を作用させずに変形する機構を生成するため、まず、剛接骨組の塑性崩壊荷重を求める問題を、2次計画問題として定式化する。その問題を解いて得られる塑性ヒンジを不安定なヒンジとすることによって、形態変化機構が得られる。

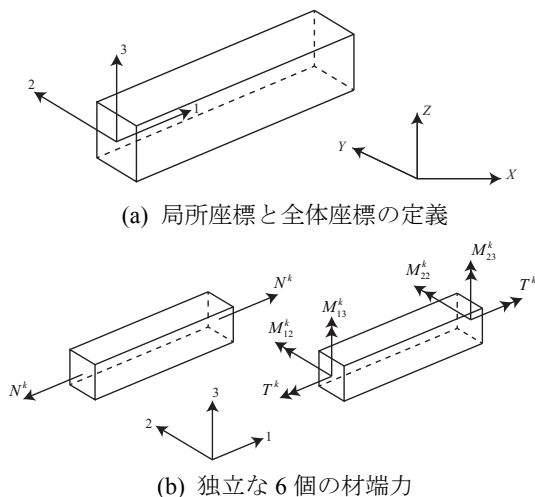


図1: 部材の局所座標と材端力の定義

部材の局所座標を図1(a)のように定義する。部材 k の2つの節点(材端)を1, 2とし、節点1から2へ向かう方向に軸1を定義する。軸2, 3は断面の主軸とする。また、全体座標を (x, y, z) とする。

図1(b)に示すように、軸力、節点1での軸2, 3まわりの曲げモーメント、ねじりモーメントを N^k , M_{12}^k , M_{13}^k , T^k とする。節点2でも同様に定義すると、部材の釣合い式から、独立な材端力は図1(b)に示す6個となる。

m 個の部材からなる骨組の材端力を並べたベクトルを $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{6m})^T$ とする。すなわち、 \mathbf{f} の成分は N^k , M_{12}^k , M_{13}^k , M_{22}^k , M_{23}^k あるいは T^k である。変位の自由度を n とし、節点力ベクトルを $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$ とする。釣合い行列を $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{6m})^T$ とすると、釣合い式は以下のように書ける。

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{p} \quad (1)$$

一般化ひずみベクトルを $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{6m})^T$ とする。すなわち、 f_i が軸力、ねじりモーメントあるいは材端での軸2, 3まわりのモーメントのとき、 c_i は部材の伸び、ねじりあるいは材端での軸2, 3まわりの回転に対応する。 \mathbf{c} と節点変位ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ の間には、ひずみ変位関係の行列 $\mathbf{H}^T = (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{6m})^T$ を用いて次の適合条件が成立する。

$$\mathbf{c} = \mathbf{H}^T \mathbf{u} \quad (2)$$

3. 展開機構を生成するための2次計画問題

材端力は \mathbf{f} の関数と考えられるため、 $N^k(\mathbf{f})$, $M_{12}^k(\mathbf{f})$, $M_{13}^k(\mathbf{f})$, $M_{22}^k(\mathbf{f})$, $M_{23}^k(\mathbf{f})$, $T^k(\mathbf{f})$ のように表し、軸力の2乗と材端でのモーメントの2乗和それぞれに対して上限値を与える。

機構の入力節点と出力節点を定義し、入出力変位に対応する荷重ベクトルを \mathbf{p}_{in} , \mathbf{p}_{out} として、入力変位に関する荷重係数 λ_{in} を最大化する問題を次のように定式化する。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \lambda_{in} \\ & \text{subject to } \sum_{i=1}^{6m} f_i \mathbf{h}_i = \mathbf{p}_{out} + \lambda_{in} \mathbf{p}_{in} \\ & (T^k(\mathbf{f}))^2 + (M_{j_2}^k(\mathbf{f}))^2 + (M_{j_3}^k(\mathbf{f}))^2 \leq \alpha w^b, \quad (3) \\ & (k=1, \dots, m; j=1, 2) \\ & (N^k(\mathbf{f}))^2 \leq \alpha w^a, \quad (k=1, \dots, m) \end{aligned}$$

ここで、 w^b および w^a は軸力とモーメントに対する重み係数であり、 α はスケールパラメータである。

\mathbf{u} 、 c_{kj} 、 c_{k0} を 1, 2, 3 番目の制約に対するラグランジュ乗数とすると、上記の最適化問題に対する最適性条件は以下のように書ける。

- \mathbf{u} の正規化条件:

$$1 - \mathbf{p}_{in}^T \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

- 曲げモーメントに対応する f_i :

$$\mathbf{h}_i^T \mathbf{u} - 2M_{jp}^k(\mathbf{f})c_{kj} = 0, \quad (k=1, \dots, m; j=1, 2; p=2, 3) \quad (5)$$

- ねじりモーメントに対応する f_i :

$$\mathbf{h}_i^T \mathbf{u} - 2T^k(\mathbf{f})(c_{k1} + c_{k2}) = 0, \quad (k=1, \dots, m; j=1, 2) \quad (6)$$

- 軸力に対応する f_i :

$$\mathbf{h}_i^T \mathbf{u} - 2N^k(\mathbf{f})c_{k0} = 0, \quad (k=1, \dots, m) \quad (7)$$

- 相補性条件:

$$[(T^k(\mathbf{f}))^2 + (M_{j2}^k(\mathbf{f}))^2 + (M_{j3}^k(\mathbf{f}))^2 - \alpha w^b]c_{kj} = 0, \quad c_{kj} \geq 0, \quad (k=1, \dots, m; j=1, 2) \quad (8)$$

$$[(N^k(\mathbf{f}))^2 - \alpha w^a]c_{k0} = 0, \quad c_{k0} \geq 0, \quad (k=1, \dots, m) \quad (9)$$

部材 k の節点 j ($=1, 2$) の p ($=1, 2, 3$) 軸まわりの回転角を θ_{jp}^k とする。部材のねじり回転角 θ_1^k は次式で定義できる。

$$\theta_1^k = \theta_{21}^k - \theta_{11}^k \quad (10)$$

式(2), (5), (6), (10)より次式を得る。

- 曲げ:

$$c_i = \mathbf{h}_i^T \mathbf{u} = \theta_{jp}^k = 2M_{jp}^k c_{kj}, \quad (k=1, \dots, m; j=1, 2; p=2, 3) \quad (11)$$

- ねじり:

$$c_i = \mathbf{h}_i^T \mathbf{u} = \theta_1^k = \theta_{21}^k - \theta_{11}^k = 2T^k(c_{k1} + c_{k2}), \quad (k=1, \dots, m) \quad (12)$$

したがって、部材 k の材端 1, 2 のヒンジの方向 \mathbf{R}_1^k 、 \mathbf{R}_2^k は次式で得られる。

$$\mathbf{R}_1^k = \begin{pmatrix} \theta_{11}^k \\ \theta_{12}^k \\ \theta_{13}^k \end{pmatrix} = 2c_{k1} \begin{pmatrix} -T^k \\ M_{12}^k \\ M_{13}^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2^k = \begin{pmatrix} \theta_{21}^k \\ \theta_{22}^k \\ \theta_{23}^k \end{pmatrix} = 2c_{k2} \begin{pmatrix} T^k \\ M_{22}^k \\ M_{23}^k \end{pmatrix} \quad (13)$$

すなわち、材端の回転角はモーメントに比例し、2 次計画問題(3)を解いて斜め方向ヒンジをもつ機構を求めることができる。ここで、式(8)からわかるように、降伏条件が等号で満たされないときは、 c_{kj} は 0 となる。

パラメータ α の下限値は、次の 2 次計画問題を解いて $\alpha = 1/\mu$ とすることにより求められる[3,4]。

maximize μ

subject to $\sum_{i=1}^{6m} f_i \mathbf{h}_i = \mu \mathbf{p}_{out}$

$$(T^k(\mathbf{f}))^2 + (M_{j2}^k(\mathbf{f}))^2 + (M_{j3}^k(\mathbf{f}))^2 \leq w^b, \quad (k=1, \dots, m; j=1, 2) \quad (14)$$

$$(N^k(\mathbf{f}))^2 \leq w^a, \quad (k=1, \dots, m)$$

支点を含む節点の数を j 、拘束変位成分数を k 、一般化ひずみの解放数を r とすると、機構の不安定次数 q は次式で計算できる。

$$q = 6j - 6m - k + r \quad (15)$$

4. 機構の生成例

下記の例で、すべての部材の長さは 1 m であり、材料のヤング係数は 200 GPa である。以下では、力と長さの単位を N, m として省略する。最適化にはライブラリ SNOPT Ver. 7.2 [5]を用いる。重み係数 w^a 、 w^b は 1000, 10 とする。

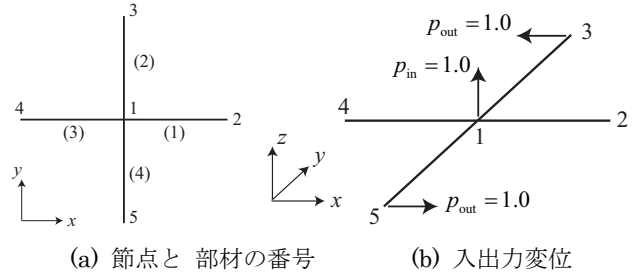


図 4: 単純な 4 部材モデル

モデル 1

図 4(a)のような単純な 4 部材モデルの節点 1 で z 方向変位以外の変位と回転を拘束し、他の節点で z 方向変位を拘束する。節点 1 を上方向に移動させたときに節点 3 が左方向、節点 5 が右方向に移動するような機構を生成するため、入力と出力の荷重を図 4(b)のように与える。問題(14)を解くと $\mu = 3.1622$ であり、 α の下限値は $1/3.1622 = 0.31624$ となる。

最適化問題(3)を解いて得られたヒンジの位置を図 5(a)に示す。部材 2, 4 の節点 1 側の材端のヒンジは、図 5(b)に示すように斜め方向を向いている。

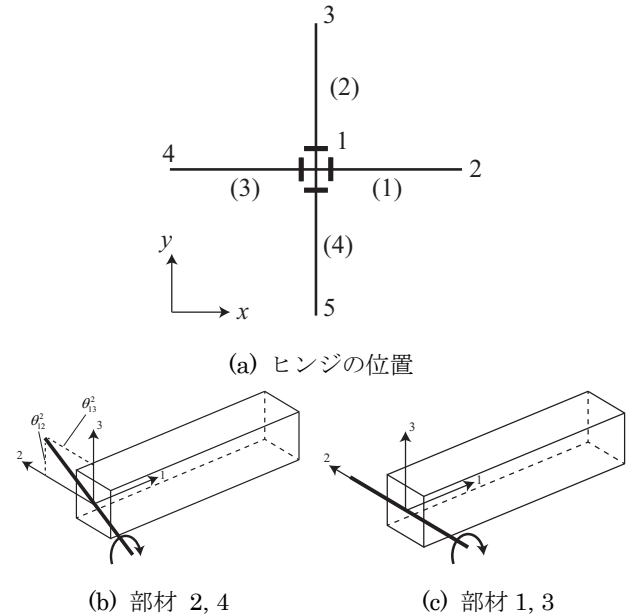


図 5: 4 部材骨組のヒンジ位置とヒンジの方向

$\alpha = 0.4, 0.5, 0.6$ のときの最適解での $M_{12}^2, M_{13}^2, \theta_{12}^2, \theta_{13}^2$ を表 1 に示す。表より、 $\theta_{12}^2 / \theta_{13}^2 = M_{12}^2 / M_{13}^2$ が成立し、ヒンジの方向はモーメントに比例することが確認できる。このモデルの m, j の値は 4, 5 であり、拘束自由度数 k は 9 である。また、材端の解放数 r は 4 であり、機構の自由度数は $q = 6 \times 5 - 6 \times 4 + 4 - 9 = 1$ となる。

表 1: 最適解における $M_{12}^2, M_{13}^2, \theta_{12}^2, \theta_{13}^2$ の値

α	M_{12}^2	M_{13}^2	θ_{12}^2	θ_{13}^2
0.4	-1.73205	-1.0	-1.0	-0.57735
0.5	-2.0	-1.0	-1.0	-0.5
0.6	-2.23607	-1.0	-1.0	-0.44721

ところで、最適化問題(3)を解く段階では微小変形しか考慮していないため、ABAQUS Ver. 6.13 [6] を用いて大変形解析を行う。各部材を 2 つの梁要素に分割し、断面は半径 50 mm、厚さ 2 mm の円筒とする。ヒンジにはコネクター要素 CONN3D2 を用いる。

解析のパラメータ t を 0 から 1 まで増加させる。この例では、 t は節点 1 の z 方向変位である。 $\alpha = 0.4$ の解における変形プロセスを図 6 に示す。図 6(b) より、節点 3, 5 が節点 1 のまわりに回転していることが確認できる。

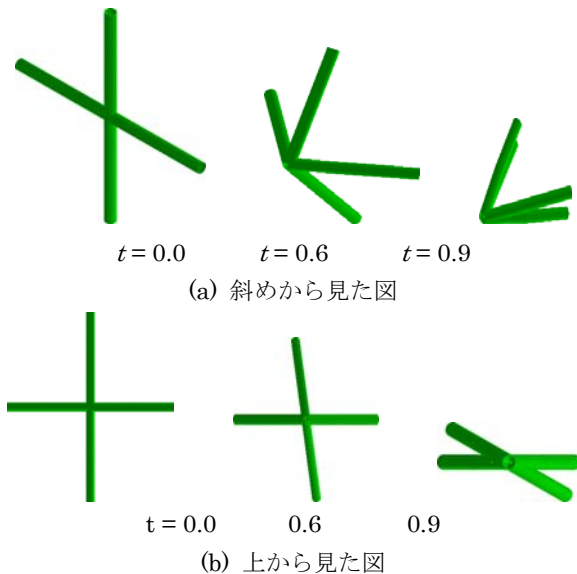


図 6: 4 部材骨組の変形プロセス

節点 1 の z 方向変位と z 方向反力の関係を図 7 に示す。 t が 0.9 に達して部材が垂直に近くなるまで反力は発生しないことが確認できる。また、ヒンジ方向が z 方向に近い $\alpha = 0.4$ で反力は大きくなっている。

節点 1 の z 方向変位と出力変位である節点 5 の x 方向変位の関係を図 8 に示す。図より、節点 5 の x 方向変位は最初は増加するが、部材が鉛直に近くなると減少することが確認できる。また、ヒンジ方向が z 方向に近い $\alpha = 0.4$ で変位は大きくなっている。

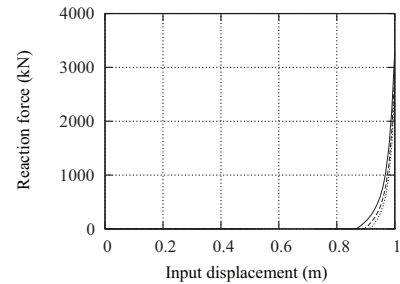


図 7: 節点 1 の z 方向変位と z 方向反力の関係; 実線: $\alpha = 0.4$, 破線: $\alpha = 0.5$, 点線: $\alpha = 0.6$.

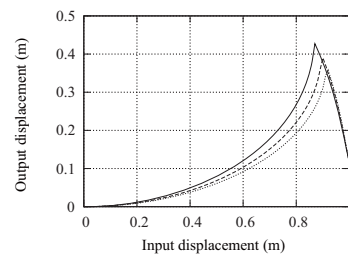
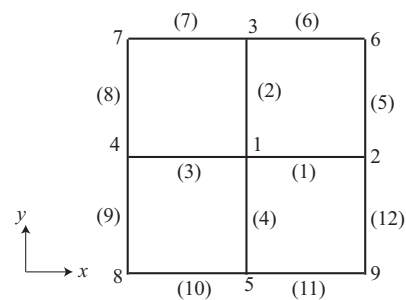


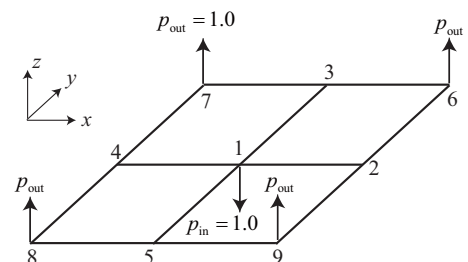
図 8: 節点 1 の z 方向変位と節点 5 の x 方向反力の関係; 実線: $\alpha = 0.4$, 破線: $\alpha = 0.5$, 点線: $\alpha = 0.6$.

モデル 2

次に、図 9 のような直交格子の機構を生成する。節点 2, 4 を y, z 方向に支持し、節点 3, 5 を x, z 方向に支持する。節点 1 を z 軸負の方向に移動させたとき、節点 6, 7, 8, 9 が z 軸正の方向に移動する機構を生成する。問題(14)を解くと $\mu = 8.6395$ であり、 α の下限値は $1/8.6395 = 0.11575$ となる。



(a) 部材番号と節点番号



(b) 入力変位と出力変位

図 9: 正方形格子モデル

$\alpha=0.12$ のときのヒンジ位置を図 10(a)に示す。節点 6 と、部材 5 の節点 2 側の材端のヒンジの方向を表 2 に示す。このように、 α を変化させることにより、さまざまなヒンジ方向の機構が得られる。

幾何学的線形形解析を行った結果、図 10(a)の機構は大変形の機構ではないことがわかった。そこで、図 10(b)のように×印で表した 8 個のねじりヒンジを追加すると、大変形時でも反力は発生しなかった。変形状態を図 11 に示す。

表 2: 節点 6 と、部材 2 の節点 5 側の材端のヒンジの方向

α	node 6			node 2 (member 5)		
	x	y	z	x	y	z
0.12	0.4831	0.4831	0.8563	0.9831	0.4831	0.0148
0.15	0.5791	0.5791	0.9107	1.0791	0.5791	0.0168
0.20	0.7071	0.7071	1.0000	1.2071	0.7071	0.2071

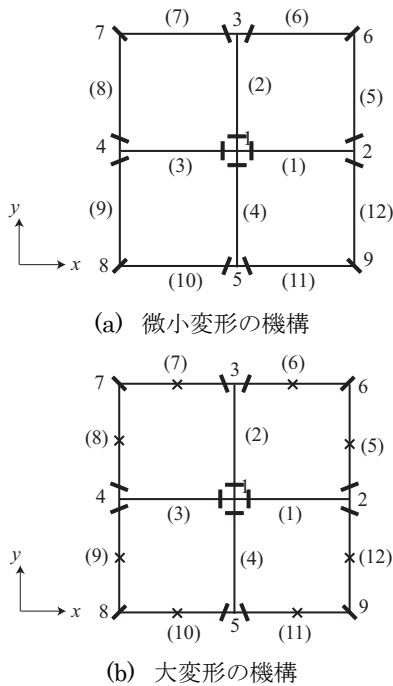


図 10: 正方形格子モデルの微小変形と大変形の機構

このモデルでは、 m, j の値は 12, 9 であり、 $k=8, r=24$ なので、機構の自由度は $q=6 \times 9 - 6 \times 12 + 24 - 8 = -2$ である。このような機構を **over-constrained mechanism** という。ところで、局所座標の方向のヒンジのみ許容する場合には、ヒンジの数は 28 であり、斜め方向のヒンジを許容することによってヒンジの数を減らすことが可能であることがわかる。

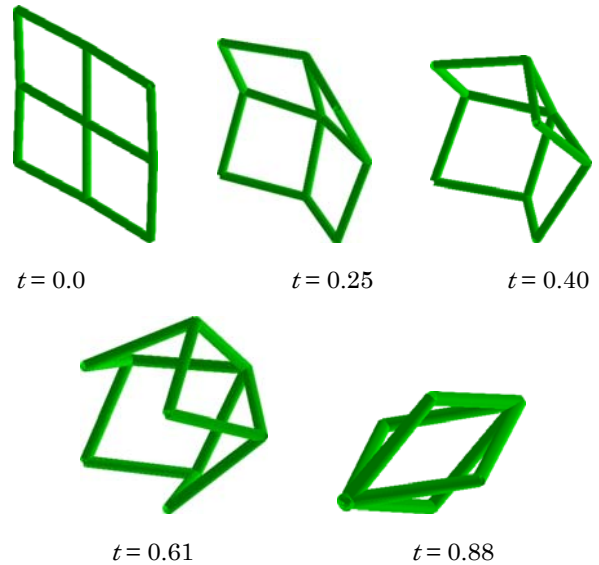


図 11: 正方形格子モデルの変形プロセス

5. 結論

本研究で得られた成果は以下のとおりである。

1. 材端モーメントのノルムで定義される降伏条件を有する極限解析問題と等価な 2 次計画問題を解くことによって、斜め方向ヒンジを有する機構を生成できる。
2. ヒンジの方向ベクトルの成分が材端モーメントに比例することを、2 次計画問題の最適性条件から導くことができる。
3. 斜め方向ヒンジを許容することで、大変形機構を実現するためのヒンジの数を低減できる。

[参考文献]

- [1] C. J. Gantes, Deployable Structures: Analysis and Design. WIT Press; 2001.
- [2] M. Stolpe and A. Kawamoto, Design of planar articulated mechanisms using branch and bound. Mathematical Programming, Vol. 103, 357–397, 2005.
- [3] M. Ohsaki., Y. Kanno and S. Tsuda, Linear programming approach to design of spatial link mechanism with partially rigid joints. Struct. Multidisc. Optim., Vol. 50, 945–956, 2014.
- [4] S. Tsuda, M. Ohsaki and Y. Kanno, Analysis and design of deployable frames with partially rigid connections. Proc. IASS Symposium 2013, Wroclaw, Poland, Int. Assoc. Shell and Spatial Struct., Paper No. 1206, 2013.
- [5] P. E. Gill, W. Murray and M. A. Saunders, SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization. SIAM J. on Opt., Vol. 12, 979–1006, 2002.
- [6] Dassault Systemes, ABAQUS User's Manual Ver. 6.13, 2014.

*1 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授
 *2 広島大学大学院工学研究科建築学専攻 助教
 *3 岡山県立大学デザイン工学科 准教授
 *4 竹中工務店 (元 広島大学大学生)