多面体の折りたたみに関する研究

○小林 祐貴*1 奈良 知恵*2
伊藤 仁一*3 加藤 直樹*4
堀山 貴史*5

*キーワード：Panel-hinge フレームワーク，折りたたみ，正多面体

1 はじめに

凸多面体が剛であることは Cauchy の時代から知られており [3], 凸でなく辺で折り曲がる変形する多面体でも閉じていれば，内部の体積が変わらないことが知られている [2, 4]．また，E. Demaine らによる有名な本 [5] によれば，任意の球面に同相な多面体には，平坦に折り畳まれた状態があることが知られている．さらに，第 2，第 3 著者によって，正多面体を切り開いたり，引き伸ばすことをしないで，連続的に一つの面に折り畳めることが示された [7]．

しかし，第 1 著者が正十二面体の折り畳みの動画を作成する際に，そのまま折り畳むと不具合が生じることが分かった．本研究では，第 2，第 3 著者の証明の方向 [7] に沿って自己交差の生じない正十二面体の連続的に一つの面に重なるような折り畳み方法を明らかにした．

本研究では，以下のように多面体の連続的な折りたたみを定義する．

定義 1 P を多面体とし, 以下の条件を満たすとき，多面体の集合 $\{P_t : 0 \le t \le 1\}$ を $P = P_0$ から P_1 への連続的な折りたたみ過程の多面体の集合とする．
(1) $0 \le t \le 1$ としたとき, P と等長な P_t が存在,
(2) 写像 $[0,1] \ni t \longmapsto P_t \in \{P_t : 0 \le t \le 1\}$ とし,
(3) $P_0 = P$ とし，P_1 を P が折りたたまれた状態とする．

また, 各定理の証明は投稿予定の論文 [6] に掲載予定であるため，本稿では省略する．

2 準備

2.1 菱形の折りたたみ

頂点 u と v をつなぐ線分を uv とし, $dist(u, v)$ (または単純に $|uv|$ とする) を u と v のユークリッド距離とする．ここで h を菱形 $\mathcal{R} = abcd$ の中点とする．$\mathcal{R}$ を bd を谷折として半分に折り，さらに半分に折ることで四層に重なった直角三角形を得る．この際には, はじめに $dist(a, c)$ が 0 へと減少し, その後 $dist(b, d)$ が 0 へと減少する．

以下に示す方法で折りたたむことにより，2 つの距離 $dist(a,\ c)$ と $dist(b, d\ )$ を同時に減少させていくことができる．この事実は第 2，第 3 著者により証明されている [7]．

ここで, q を hc 上の任意の頂点とする．$\mathcal{R}$ を ah, bh, ch, qb, qc, qd を山折とし，hq を谷折として折る．このとき三角形 $\triangle bhq$ と $\triangle dhq$ はそれぞれ $\triangle abh$ と $\triangle dah$ に重なる (図 1 (a), (b))．ここで, このような図形を q に関する $\mathcal{R} = abcd$ の翼型菱形折りたたみと呼ぶ. また，u' を $\mathcal{R}$ の u に関する任意の点としたとき, $dist(a', c')$ 及び $dist(b', d')$ は一意に定まらず, 柔軟であることに注意する．しかしながら，それらの距離を固定することで hc 上に一意に頂点 q が定まる．

補題 1 [7] $\mathcal{R} = abcd$ を菱形とする．任意の実数の組をそれぞれ $l\,(0 \le l \le |bd|)$, $m\,(0 \le m \le |ac|)$ とし, h を $\mathcal{R}$ の中点としたとき, $\mathcal{R}$ の翼型菱形折りたたみは $dist(b', d') = l$, $dist(a', c') = m$ となるような線分 hc 上に頂点 q が存在する．

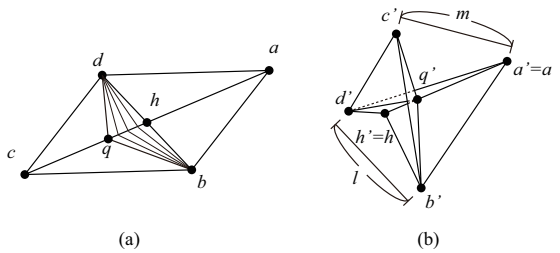


図 1 (a) **菱形** $\mathcal{R} = abcd$ (b) **距離** $dist(b', d') = l$, $dist(a', c') = m$ **とする翼型菱形折たたみ**

2.2 正十二面体

P を正十二面体とし, P の 12 個の正五角形を $F_i(1 \leq i \leq 12)$ とする．P の 20 個の頂点を $v_{5i+j}(0 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 5)$ とし，F_1 と F_{12} は xy-平面に平行であるとし, F_1 の中心は原点とする (図 2(a), (b)). 頂点集合は $0 \leq i \leq 3$ としたとき, xy-平面に平行な正五角形となる 4 つの部分集合 $V_i = \{v_{5i+j} : 1 \leq j \leq 5\}$ となり, 特に V_1 と V_4 はそれぞれ F_1 と F_{12} の頂点集合となる (図 2(a), (b))．$F_i(2 \leq i \leq 6)$ と $F_i(7 \leq i \leq 11)$ はそれぞれ F_1 と F_{12} について $F_1 \cap F_6 = v_1v_5$ および $F_{12} \cap F_7 = v_{16}v_{17}$ の順に共通の辺を持つものとし，$F_2 \cap F_7 = v_7v_{11}$ とする (図 2 (a), (b)).

また, $\{V_1, V_4\}$ と $\{V_2, V_3\}$ は黄金比 $\tau = (\sqrt{5}+1)/2$ となる半径の円柱上に位置する．

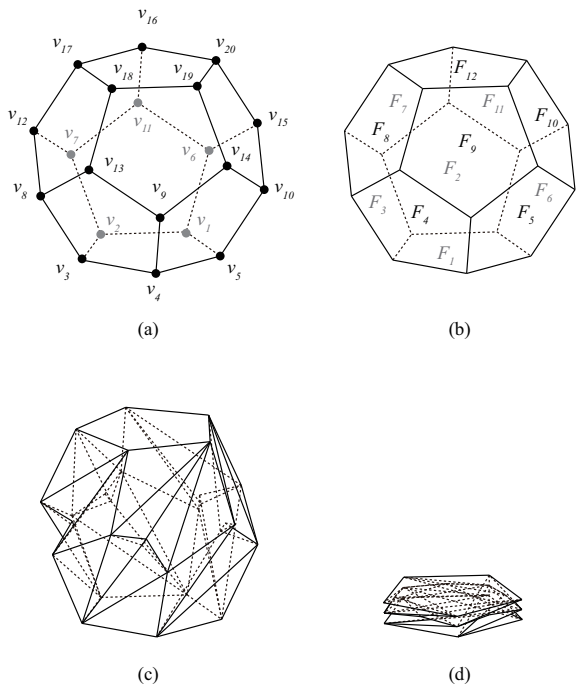


図 2 (a) 正十二面体の各頂点のラベル付け (b) 正十二面体の各面のラベル付け (c) 折りたたみ開始直後の正十二面体 (d) 平坦となる直前の正十二面体

P が平坦に折りたたまれた状態である P_1 は以下である．

(1) P_1 は本質的に P と同等である．

(2) F_1 と F_{12} は変化せず，F_{12} は $2\pi/5$ 回転し，F_1 上となる．

(3) $F_i(2 \leq i \leq 6)$ は谷折で半分となり, $2 \leq i \leq 5$ について v_{i+4} は v_i 上であり, v_{10} は v_1 上となる．

(4) F_7 は線分 $\{v_{11}g_7, v_7g_7, v_{17}g_7\}$ の谷折とm_7 を v_{11} と v_7 の中点としたとき，線分 g_7m_7 の山折で折られる (図 2(c), (d) および図 3).

F_{12} を F_1 に向けて 2 面が平行であることを保ちながら, 回転しながら押し下げることにより，P を F_{12} へと連続的に平坦にすることができる．本研究では第 2, 第 3 著者が提案した平坦化の過程[7]で，2 段の変形反角柱と呼ぶ図形 Q に到達したのち，自己交差が生じることがわかり，新たな折りたたみ方を提案している．

次章では Q について述べ, 自己交差を起こさない新たな連続的な変形を提案する．

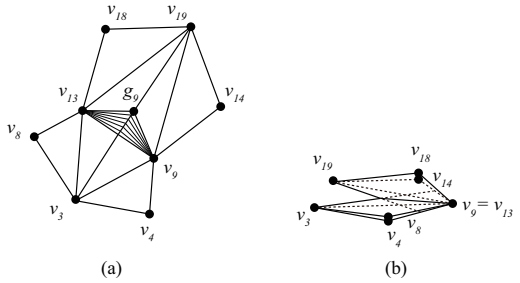


図 3 (a) P_0 のときの F_4 と F_9 (b) 折りたたまれた F_4 と F_9

2.3 2 段の変形反角柱

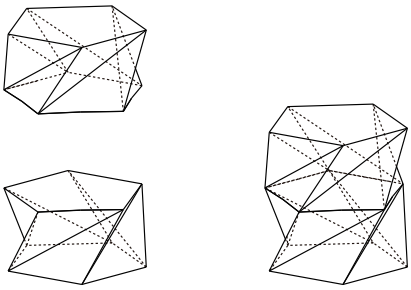
反 n 角柱は，三角形の互い違いの帯によりつながれた 2 つの平行で同じ n 角形により構成される多面体である．底面が正多角形で側面が等辺三角形のとき，その反多角柱は一様反多角柱と呼ばれる．一様な反多角柱について，側面の辺を半分除き，底面と上面の頂点をつなぐ辺を図 4 のように追加する．この操作により，異なる等辺三角形を側面にもつ反角柱を得ることができる．このような多面体を変形一様反角柱または変形反 n 角柱と呼ぶ.

また，$n = 5$ のときは，一様反五角柱の高さは底面の五角形の外接円の半径と等しい．変形反五角柱については，二等辺三角形の辺の長さの比は $1 : 1 : \tau = (\sqrt{5}+1)/2$ (黄金比) となっている．

2 つの同じ変形反五角柱を用意し，底面を除いた変形反五角柱を上面を除いた変形反五角柱の上に置く．さらに, それらの接する五角形の辺をつなげることで, 2 つの平行な五角形をもつ多面体を得ることができる．そのような多面体を 2 段の変形反五角柱と呼ぶ (図 5).

(a) (b)

図 4　(a) 一様反五角柱 (b) 変形反五角柱



(a) (b)

図 5　(a) 2 つの同じ変形反五角柱 (b) 2 段 の変形反五角柱

3　正十二面体から 2 段の変形反角柱への連続的な折り

ここで P を 2 章において定義した正十二面体であるとする．F_1 及び F_{12} をそれぞれ底面, 上面とし, その他の側面の組を$\{F_2, F_7\}$, $\{F_3, F_8\}$, $\{F_4, F_9\}$, $\{F_5, F_{10}\}$, $\{F_6, F_{11}\}$ とする．ここでは，それらの 5 つの組を三角形に分割する．例えば，$\{F_2, F_7\}$ は線分 v_1v_{11}, v_1v_7, $v_{17}v_{11}$, $v_{17}v_7$ により分割される (図 2(2))．他の組も同様に分割する．$\{F_2, F_7\}$ より, 2 つの三角形 $\triangle v_1v_{11}v_7$, $\triangle v_{17}v_{11}v_7$ を取り除き，v_1v_{11} を v_1v_7 に，$v_{17}v_{11}$ を $v_{17}v_7$ とつなげる．同様の操作をそれぞれの組に対して行い，得られる形は 2 段の変形反五角柱 Q である．本研究では, P から Q への連続的な動きが存在することを示しており, その動きは第 2，第 3 著者が提案した動き[7]を修正したものである．

以下の定理を示した．

定理 1 正十二面体は *2* つの五角形の面が剛である *2* 段の変形反五角柱へと，回転移動のみによって連続的に折ることができる．

図 6 に正十二面体が 2 段の変形反五角柱へと連続的に折られる様子を示す．

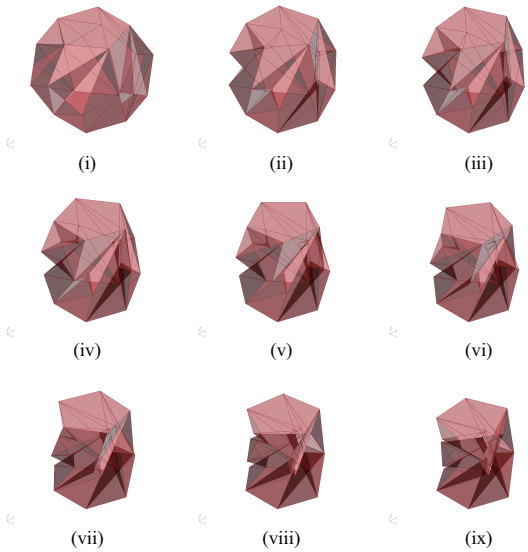


図 6　正十二面体が 2 段の変形反五角柱へと連続的に折られる様子

4　2 段の変形反五角柱の連続的な平坦化

正十二面体を連続的に平坦にする動きを得るために, 2 段の変形反五角柱が連続的に平坦にすることが可能であることを示した．

定理 2 *2* つの五角形の面が剛である *2* 段の変形反五角柱は, 回転移動のみによって連続的に平坦にすることができる．

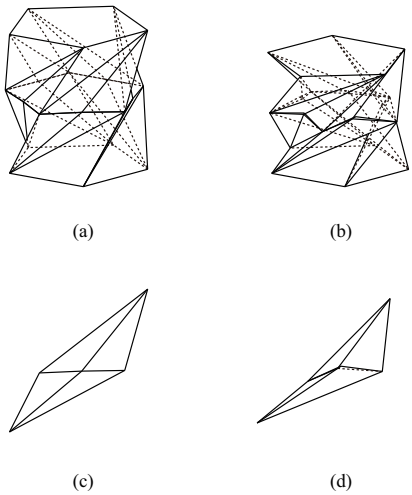


図 7　(a) 2 段の変形反五角柱 (b) (a) が折りたたまれる過程の例 (c) (a) の隣接する 2 つの面 (d) (c) が折りたたまれる過程の例

図 8 に 2 段の変形反五角柱が平坦に折られる様子を示す.

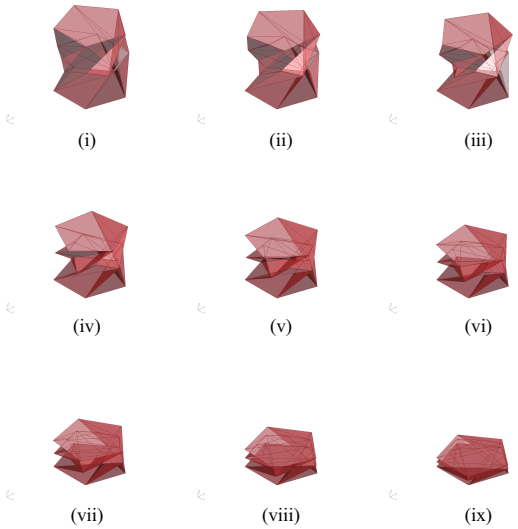


図 8　2 段の変形反五角柱が平坦に折りたたまれる様子

5　正十二面体の連続的な平坦化

定理 1, 定理 2 より，以下の定理を得る.

定理 3 正十二面体は回転移動のみにより, 連続的に平坦に折りたたむことができる.

6　今後の課題

本稿では正十二面体の自己交差の生じない新たな折りたたみ方法を提案したが, 正二十面体や, 切頂十二面体といった他の多面体を自己交差の生じない，平坦にする連続的な動きは明らかになっていない．また，正多面体ではない一般の多面体について，同様な折りたたみによって自己交差の生じない平坦化が可能であるか，ということに関しても証明されておらず，今後の課題としたい.

謝辞： 本研究は，JSPS 科研費 25240004, 15KT0020 の助成を受けたものである.

[参考文献]

1）Z. Abel, E. Demaine, M. Demaine, J. Itoh, A. Lebiw, C. Nara, J. O'Rourke, Continuously flattening polyhedra using straight skeletons, Proc. 30th Annual Symposium on Computational Geometry (SoCG), pp. 396–405, 2014.
2）I. Sabitov, The volume of polyhedron as a function of its metric, *Fundam. Prikl. Mat.*, 2(4), 1235-1246, 1996.
3）A. Cauchy, Sur les polygons et les polyedres. J. Ecole Polytech. 9: 87, 1813.
4）R. Connelly, I. Sabitov, A. Walz, The bellows conjecture, *Beiträge Algebra Geom.*, 38: 1–10, 1997.
5）E. D. Demaine and J. O'Rourke, *Geometric Folding Algorithms, Linkages; Origami, Polyhedra*, Cambridge University Press, 2007.
6）T. Horiyama, J.-i. Itoh, N. Katoh, Y. Kobayashi, C. Nara, Proc. 18th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs, Under preparation.
7）J. Itoh and C. Nara, Continuous flattening of Platonic polyhedra In J. Akiyama, J. Bao, M. Kano and X. Tan (eds.) CGGA 2010. *Computational geometry, Graphs and Applications*, LNCS, vol. 7033, pp. 108–121. Springer, 2011.

∗1 東京工業大学
∗2 明治大学
∗3 熊本大学
∗4 関西学院大学
∗5 埼玉大学