凸集合内の不確定変動に対し順序統計量を用いた建築構造の最悪地震時応答解析

○山川 誠*1　　大崎 純*2

キーワード：地震時応答　順序統計　不確定性　ロバスト性　最適設計

１．はじめに

建築構造の設計においては，外乱や構造パラメータなどの不確定性に対して頑強となるような設計が望ましい．不確定性を陽に考慮した設計として，ロバスト設計が知られている[1)]．しかし，地震動を予測することは難しく，十分な知見がなく，根拠の曖昧なパラメータ変動幅で規定される設計問題を迅速に解くことが求められる．このような不確定性を有する構造最適化問題に対して，順序統計量から最悪応答値を見積る方法を著者らは提案している[2)]．そこでは変動領域が矩形の場合のみに適用が限定されていたが，より一般的に次式のような凸集合として変動領域が与えられる場合への拡張を考える．

$$K := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i(\boldsymbol{x}) \le b_i, i = 1, \cdots, m \right\} \tag{1}$$

ここで，$a_i(\boldsymbol{x}), i = 1, \cdots, m$ は 2 階連続微分可能な凸関数，$b_i \in \mathbb{R}$，$i = 1, \cdots, m$ は定数，n は変数の次元，m は制約関数の数とする．以上の目的に対し，障壁マルコフ連鎖モンテカルロ法によるサンプリングを用いることを提案する．

２．順序統計量に基づく最悪応答値予測

構造物パラメータおよび地震動特性パラメータに対して，不確定変動 $\boldsymbol{x} \in K$ が生じる場合を考え，対応する地震時応答を $g(\boldsymbol{x})$ と表す．ここで，K は式(1)で定義される凸集合である．領域 K 上に分布する確率変数列 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_N$ を考え，対応する応答値の列を

$$G_1 = g(\boldsymbol{X}_1), G_2 = g(\boldsymbol{X}_2), \cdots, G_N = g(\boldsymbol{X}_N) \tag{2}$$

と表す．確率変数列 $G_1, G_2, \cdots, G_N$ はそれぞれ独立であるが，同一の累積分布関数

$$\Pr\{G \le \bar{g}\} = \Pr\left\{ \boldsymbol{X} \in K \mid g(\boldsymbol{X}) \le \bar{g} \right\} \tag{3}$$

を持つとする．確率変数列 $G_1, G_2, \cdots, G_N$ を降順に並べ替え

$$G_{1,N} \ge G_{1,N} \ge \cdots \ge G_{k,N} \ge \cdots \ge G_{N,N} \tag{4}$$

と表す．ここで，$G_{k,N}$ $(1 \le k \le N)$ は第 k 順序統計量と呼ばれる．与えられた $0 < \alpha, \gamma < 1$ に対し，ある k について表 1 に示す N 以上の標本数があれば，

$$\Pr\left\{ \Pr\left\{ G \le G_{k,N} \mid G_1, \cdots, G_N \right\} \ge \gamma \right\} \ge \alpha \tag{5}$$

が成り立つ[2)]．パラメータ α, γ は「確率変数 $G_1, \cdots, G_N$ が従う分布のうち 100γ% が $G_{k,N}$ 以下になる確率は 100α% 以上」を意味する．言い換えれば，「$G_{k,N}$ が上位 $100(1-\gamma)$ % 以内の最悪応答である確率は 100α %以上」ということになる．ここで特筆すべきは $G_1, \cdots, G_N$ の分布に関わらず，式(5)が成り立ち，さらに，存在さえ仮定できれば，分布を陽に用いる必要はないという利点をもつ．このようなアプローチはノンパラメトリック片側許容区間として知られている[3-5)]．

表 1　必要標本数

(a)　$\alpha = \gamma = 0.9$

k	N	k	N	k	N	k	N
1	22	6	91	11	152	16	210
2	38	7	104	12	164	17	222
3	52	8	116	13	175	18	233
4	65	9	128	14	187	19	245
5	78	10	140	15	199	20	256

(b)　$\alpha = 0.99$，$\gamma = 0.9$

k	N	k	N	k	N	k	N
1	44	6	127	11	197	16	262
2	64	7	142	12	210	17	275
3	81	8	156	13	223	18	287
4	97	9	170	14	236	19	300
5	113	10	183	15	249	20	312

(c)　$\alpha = \gamma = 0.99$

k	N	k	N	k	N	k	N
1	459	6	1307	11	2010	16	2669
2	662	7	1453	12	2144	17	2798
3	838	8	1596	13	2277	18	2925
4	1001	9	1736	14	2409	19	3052
5	1157	10	1874	15	2539	20	3179

３．マルコフ連鎖モンテカルロ法によるサンプリング

3.1. 障壁マルコフ連鎖モンテカルロ法

前節に述べた順序統計量に基づき，最悪応答値予測を行うためには変動領域 K 上で何らかの分布に従った $\boldsymbol{X}$ のサンプリングが必要である．事前に情報がなければ，一様分布を選ぶことが自然である．領域 K 上の標本 $\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_N$ に

ついて，N を十分大きくとれば一様分布に収束するようなサンプリング法として，Markov Chain Monte Carlo methods（MCMC）が知られている．とりわけ，MCMC に内点法の考えかたをとりいれた Barrier Monte Carlo methods（BMC）では，多項式時間で一様分布へ収束することが理論的に証明されているものがある [6]．これら BMC では，対数障壁関数

$$\phi(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{m} -\log\left(b_i - a_i(\boldsymbol{x})\right) \tag{6}$$

に基づいて規定される Dikin ellipsoid

$$D_x := \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^T \nabla^2\phi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \le r^2 \right\} \tag{7}$$

内の Random walk を基本とする．ここでは， MCMC の一種である Hit-and-Run Walk に BMC の考え方をとりいれた方法である Barrier Hit-and-Run Walk [7]（BHRW）を用いる．BHRW のアルゴリズムを以下に示す．

Barrier Hit-and-Run Walk (BHRW)

1. 開始点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{int}(K)$ を与え， $i=0$， $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ とする．
2. D_x 内の一様分布から方向 $\boldsymbol{d}$ をランダムに選ぶ．
3. $T := \{t \in \mathbb{R} : \boldsymbol{x}+t\boldsymbol{d} \in K\}$ 内の一様分布からステップ長 t をランダムに選び，点 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{d}$ を生成する．
4. $r_x = \|\boldsymbol{d}\| \big/ \sqrt{\boldsymbol{d}^T\nabla^2\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}}$， $r_y = \|\boldsymbol{d}\| \big/ \sqrt{\boldsymbol{d}^T\nabla^2\phi(\boldsymbol{y})\boldsymbol{d}}$ を計算し，確率 $\min\{1, (r_y/r_x)^n \sqrt{\det(\nabla^2\phi(\boldsymbol{y}))/\det(\nabla^2\phi(\boldsymbol{x}))}\}$ で $\boldsymbol{y}$ を標本 $\boldsymbol{x}$ として受け入れる．さもなければ $\boldsymbol{x}$ をそのまま保持する．
5. $i \to i+1$ とし，サンプル数が N に達するまで，ステップ2以降を繰り返す．

3.2. 一様性の確認

生成される標本の一様性を確認するために，二次元の線形関数からなる領域

$$K_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 1\} \tag{8}$$

に対し， $N=1{,}000$ と与えた BHRW を適用する．生成された標本点の散布図を図 1 に，標本点で観測された $t = x_1 + x_2$ についての経験累積分布を図 2 にそれぞれ示す．図 2 では，一様分布の場合の累積分布関数の理論値をあわせて示している．図 1 および図 2 から，一様分布に近いサンプリングが実現されていることがわかる．次に，非線形関数を含む凸領域

$$K_2 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1^2 + x_2^2 \le 1\} \tag{9}$$

に対して同様に適用する．得られた標本の散布図を図 3 に，$t = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ についての経験累積分布および理論累積分布を図 4 にそれぞれ示す．この場合も一様分布に近いサンプリングが得られていることが確認される．

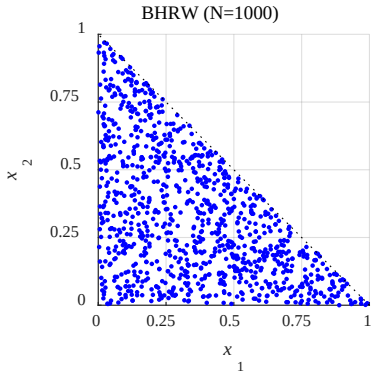

図 1　標本点の散布図（K_1, $N=1{,}000$）

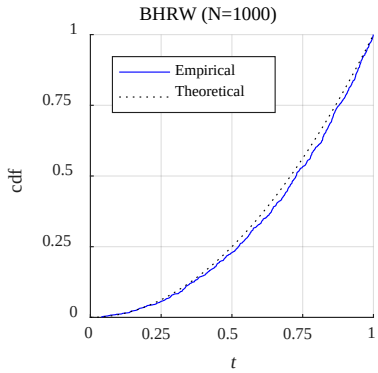

図 2　累積分布の比較（K_1, $N=1{,}000$）

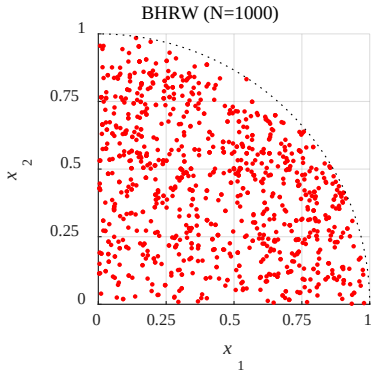

図 3　標本点の散布図（K_2, $N=1{,}000$）

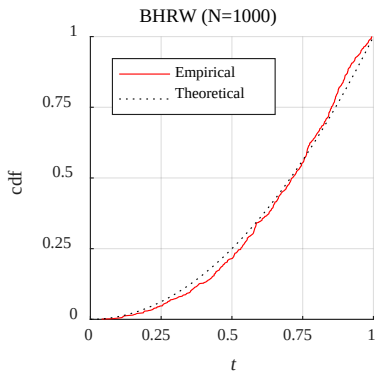

図 4　累積分布の比較（K_2, $N=1{,}000$）

次に，標本数 N を大きくとることによる一様性の改善について調べる．BHRW による第 i 標本を $\boldsymbol{x}_i=(x_1^i,x_2^i)$ と表し，領域 K_1 に対しては指標値 $t_i=x_1^i+x_2^i$ を用い， K_2 に対しては指標値 $t_i=\sqrt{(x_1^i)^2+(x_2^i)^2}$ を用いて，経験累積分布の理論累積分布関数からの誤差

$$e_i=\left|\Phi(t_i)-\hat{\Phi}(t_i)\right|,\ i=1,\cdots,N, \tag{10}$$

を算出する．ここで，$\Phi(\cdot)$ は経験累積分布関数，$\hat{\Phi}(\cdot)$ は理論累積分布関数とする．$N=10,10^2,10^3,10^4,10^5$ に対して算出される平均誤差

$$e_{\mathrm{mean}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}e_i \tag{11}$$

を図 5 にまとめて示す．標本数 N を大きくとれば，K_1,K_2 どちらの場合においても平均誤差が減少し，一様性が改善されることが確認される．

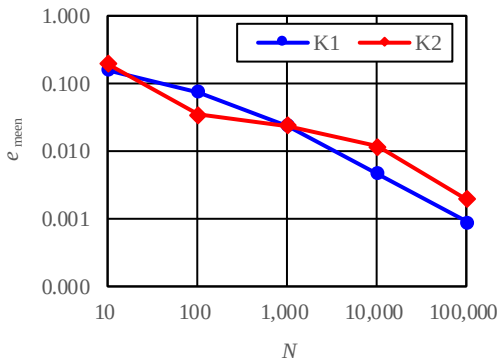

図 5　理論分布との平均誤差（$N=10,10^2,10^3,10^4,10^5$）

4．数値解析例

4.1. 問題設定

図 6 のように，各層質量 100ton，階高 3.25m，構造物全体重量 $W=100\times9.8\times10=9{,}800$kN の 10 層せん断質点系モデルを考え，第 i 層の耐力 Q_i に対して図 7 に示すような Tri-Linear 型復元力特性を与える．層の耐力 Q_i を全体重量 W で除した係数 $c_i=Q_i/W$ について，表 2 に示すように与える．これは後述の設計用地震動に対する応答最小解であり，対応する最大応答層間変形角は 0.0085 rad となる．

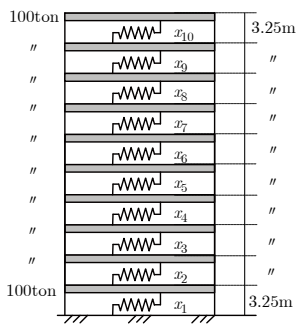

図 6　せん断質点系モデル

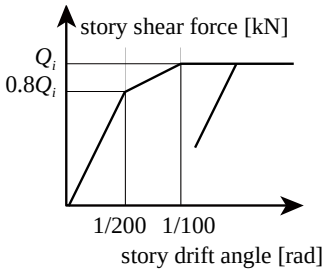

図 7　層の復元力特性

表 2　各層耐力分布（$c_i=Q_i/W$）

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_i	0.36	0.35	0.34	0.32	0.30	0.29	0.32	0.39	0.40	0.40

設計用地震動として，El Centro 1940 NS, Taft 1952 EW の二波について最大地動速度を 50cm/s^2 にスケーリングし与える．これら設計用地震動のフーリエ振幅スペクトルに周期方向変動 $\Delta T_1,\Delta T_2$ [sec] をそれぞれ与え，逆フーリエ変換から不確定な設計用地震動群を生成する．さらに，層の耐力係数 c_i に不確定変動 Δc_i $(i=1,\cdots,10)$ を加える．以上より，本解析例では，構造物パラメータおよび地震動特性パラメータに対する不確定変動を

$$\boldsymbol{x}=\left(\Delta c_1,\cdots,\Delta c_{10},\Delta T_1,\Delta T_2\right)\in\mathbb{R}^{12} \tag{12}$$

と与る．さらに，パラメータ $\boldsymbol{x}$ の変動領域を

$$K=\left\{\begin{array}{l|ll}\boldsymbol{x}=(\Delta c_1,\cdots,\Delta c_{10}, & -0.05c_i\le\Delta c_i\le0.05c_i & (i=1,\cdots,10)\\ \qquad\qquad\Delta T_1,\Delta T_2) & -0.1\le\Delta T_i\le0.1 & (i=1,2)\\ & \sum_{i=1}^{10}\left|\Delta c_i\right|\le0.1 & \end{array}\right\} \tag{13}$$

と与える．また， $\boldsymbol{x}$ に対応する時刻歴応答解析から評価される建物全体の最大応答層間変形角を $g(\boldsymbol{x})$ と表す．

4.2. 順序統計量による予測精度検証

表 1 に示された条件において，$\alpha=0.99,\gamma=0.9$ に対応する順序統計量 $G_{k,N}$ を観測すれば，次式の関係が成り立つ．

$$\Pr\left\{\text{応答の90\%以上が } G_{k,N}\text{以下となる}\right\}\ge99\% \tag{14}$$

BHRW により生成された独立な標本 200 組を用いて，$\alpha=0.99,\gamma=0.9$ に対応する順序統計量 $G_{k,N}$ を算出した．これらの平均値，標準偏差を表 3 に示す．さらに，新たに 10^6 個の検証用標本を生成し，対応する標本値 $g_1,\cdots,g_{1,000,000}$ から，式(8)による予測精度を検証するため指標値

$$\Gamma=\frac{\left|\{g_1,\cdots,g_{1,000,000}\text{の中で}G_{k,N}\text{以下となる標本}\}\right|}{10^6} \tag{15}$$

を算出する．この指標値を表 4 にまとめる．表 4 最下段より，「応答の 90%が $G_{k,N}$ 以下となる」確率は，いずれの場合もほぼ 99%であったことが確認される．

表 3　算出された順序統計量（単位：1/1000 rad）

order statics	$G_{1,44}$	$G_{2,64}$	$G_{5,113}$	$G_{20,312}$
mean value	9.987	9.913	9.849	9.767
standard deviation	0.158	0.120	0.075	0.040

表 4　順序統計量による予測検証（1,000,000 標本）

order statics	$G_{1,44}$	$G_{2,64}$	$G_{5,113}$	$G_{20,312}$
mean value of Γ	0.976	0.967	0.957	0.935
standard deviation of Γ	0.022	0.023	0.018	0.014
number of Γ ≥ 0.9 / number of total set	98.5%	98.0%	99.0%	99.5%

独立に観測された 200 組での順序統計量 $G_{1,44}$ を図 8 に，$G_{20,312}$ を図 9 に，検証用標本から観測された各層の最大応答層間変形角とあわせてそれぞれ示す．ここで，図中の「nominal response」は不確定変動を与えない場合の応答量を示す．また，対応する経験累積分布を図 10 および図 11 にそれぞれ示す．$G_{1,44}$, $G_{20,312}$ のどちらを用いた予測においても，式(14)の関係は満たされるが，$G_{20,312}$ に比べ，少数標本からの予測となる $G_{1,44}$ を用いる場合，予測のばらつきが大きくなるため，安全率をより大きくとる結果となる．

5．まとめ

不確定変動領域が凸集合として与えられる場合において，BHRW 法に基づくサンプリングにより，順序統計量から所定の精度で最悪応答値を見積もることができる．

[参考文献]

1) 日本建築学会，応用力学シリーズ 12 建築構造設計における冗長性とロバスト性，2013.
2) 山川誠，大崎純，順序統計量を用いて地震動特性のパラメータ変動を考慮したロバスト最適設計，構造工学論文集，Vol.62B，pp.381-386，2016.
3) David, H.A. and Haikady, N.N.：Order Statistics, 3rd Ed, John Wiley & Sons, Inc., 2003.
4) Hoel, P.G., Introduction to Mathematical Statistics, 7th Ed, Pearson Education, Inc., 2013.
5) Krishnamoorthy, K. and Mathew, T., Statistical Tolerance Regions: Theory, Applications, and Com-putation (Vol. 744). John Wiley & Sons, 2009.
6) Kannan, R. and Narayanan H., Random walks on polytopes and an affine interior point method for linear programming, Mathematics of Operations Research, 37.1, pp.1-20, 2012.
7) Polyak, B. and Gryazina, E.N., Markov Chain Monte Carlo method exploiting barrier functions with applications to control and optimization, Computer-Aided Control System Design (CACSD), 2010 IEEE International Symposium on. IEEE, pp.1553-15571, 2010.

＊1　東京電機大学未来科学部 准教授　博士（工学）
＊2　京都大学大学院工学研究科　教授　博士（工学）

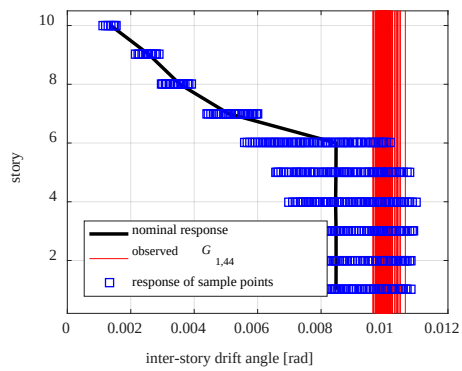

図 8　最大応答層間変形角の分布（$G_{1,44}$）

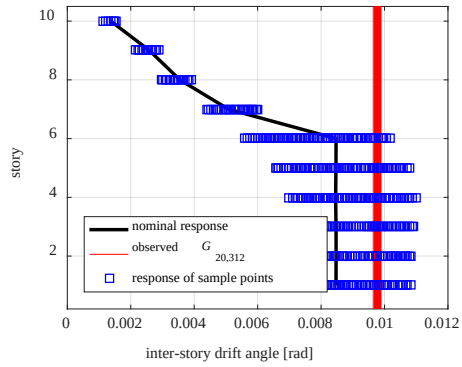

図 9　最大応答層間変形角の分布（$G_{20,312}$）

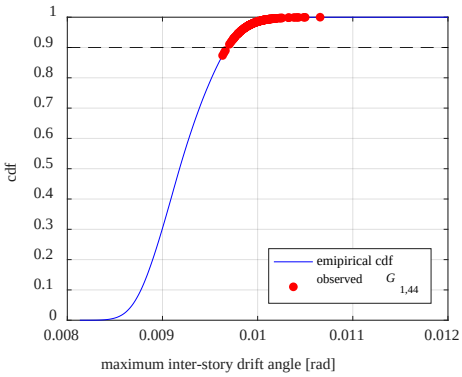

図 10　経験累積分布（$G_{1,44}$）

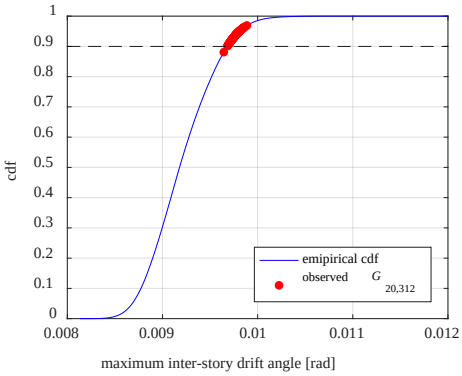

図 11　経験累積分布（$G_{20,312}$）