可展面を接続した自由曲面シェル構造の形状最適化

○崔 京蘭^{*1} 大崎 純^{*2}
 中村 奎吾^{*3}

キーワード:形状最適化 可展面 ベジエ曲面 自由曲面

1. はじめに

自由曲面シェルは、円筒や球形などの解析曲面とは異な る自由な建築形態を実現できるため、最近になって、建築 家と構造技術者との協調により、力学性能の合理性が確保 できる多様な形態が提案されている^{1,2)}。しかし、合理的 な建築形態を創生するためには、施工性や経済性も同時に 考慮することが不可欠である。

施工性も考慮に入れたシェル形状の最適化については, 線織面を接合してひずみエネルギー最小化を目的とした 關らの研究³⁾,線織面シェルの応力最小化を目的とした藤 田・大崎らの研究⁴⁾などが挙げられる。曲面を線織面で形 成することにより,ラチスシェルでは1方向に直線材を配 置することが可能となるが,コンクリートシェルでは,曲 面にねじりが存在するので,施工性の面では線織面では不 十分である。

本研究では、可展面あるいはいくつかの可展面を接合し て形成されるシェルの曲面形状を表現する方向を提案し、 可展条件用いて最適化を行なうことで力学合理性や施工 性を同時に考慮した連続体シェル構造の形態を創生でき ることを示す。また、最適化の過程において、可展条件を 数値的に満たすための制約条件 ⁵⁰と、面の法線の連続条件 を定式化する。数値解析例では、導線をモデル化するため のベジエ曲線の制御節点座標を設計変数とし、鉛直荷重と 水平荷重に対する最大主応力を最小化するような最適な 形状を求めて、その特性を考察する。

2. **可展面のモデル化**

2.1 **可展面の定義**

可展面は線織面に可展条件を与えることにより定義される。導線と母線方向のベクトルをf(u),g(u)とすると、 線織面は次式で与えられる。

$$\mathbf{s}(u,v) = \mathbf{f}(u) + v\mathbf{g}(u) \tag{1}$$

ここで、 $u, v \ge 0$ から 1 まで変化するパラメータである。 母線の $f(u) \ge C$ 対側(v=1)の端点の軌跡を曲線 $h(u) \ge t$ ると、h(u) = f(u) + g(u)であることから、式(1)は

$$\mathbf{s}(u,v) = (1-v)\mathbf{f}(u) + v\mathbf{h}(u) \tag{2}$$

のようになる。h(u)は導線と等しいパラメータを持つ曲線 であり、f(u)とh(u)の同一のパラメータ値の点を結んだ 線分が母線vg(u)になる。f(u),h(u)のuに関する微分(接 線ベクトル)を \mathbf{f}_u , \mathbf{h}_u とすると、可展条件は以下のようになる 6 。

$$\det(\mathbf{f}_u, \mathbf{h} - \mathbf{f}, \mathbf{h}_u) = 0 \tag{3}$$

式(3)は, **f**(*u*) と **h**(*u*) の接線と母線が同一平面にあること を示している。

以上より,同一パラメータを持つ2つの曲線 f(u),h(u)を 定めることより,可展面の形状を表現することができる。

2.2 ベジエ曲線による可展曲面の表現

曲線 **f**(*u*) と **h**(*u*) をベジエ曲線で定義して,可展面の形状を表現する。*n* 次ベジエ曲線 **P**^{*n*}(*u*) は次式で表すことができる。

$$\mathbf{P}^{n}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{Q}_{i} \mathbf{B}_{i}^{n}(u)$$
(4)

ここで, $\mathbf{Q}_i = (q_x^i, q_y^i, q_z^i)^T \quad \mathbf{Q}_i, \mathbf{B}_i^n(u)$ はそれぞれ *i* 番目の制 御点座標ベクトルと *n* 次のパーンスタイン基底関数を表 し, 次式で定義する。

$$\mathbf{B}_{i}^{n}(u) = \frac{n!}{i! (n-i)!} u^{i} (1-u)^{n-i}$$
(5)

式(4)のuに関する微分は次式のようになる。

$$\mathbf{P}_{u}^{n} = \frac{\partial \mathbf{P}^{n}(u)}{\partial u} = n \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}_{i}^{n-1}(u) (\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_{i})$$
(6)

曲線 $\mathbf{f}(u) \ge \mathbf{h}(u)$ の制御点をそれぞれ $\mathbf{Q}^{f} \ge \mathbf{Q}^{h}$ にすると, 曲線 $\mathbf{f}(u)$ の微分は次式のように書ける。

$$\mathbf{f}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{Q}_{i}^{f} \mathbf{B}_{i}^{n}(u)$$
(7)

$$\mathbf{f}_{u} = \frac{\partial \mathbf{f}(u)}{\partial u} = n \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}_{i}^{n-1}(u) (\mathbf{Q}_{i+1}^{f} - \mathbf{Q}_{i}^{f})$$
(8)

h(*u*) についても同様である。上式を式(2), (3)に代入する ことにより, ベジエ曲線を用いる可展曲面を以下のように 定義することができる。

$$\mathbf{s}(u,v) = (1-v)\sum_{i=0}^{n} \mathbf{Q}_{i}^{f} \mathbf{B}_{i}^{n}(u) + v\sum_{i=0}^{n} \mathbf{Q}_{i}^{h} \mathbf{B}_{i}^{n}(u)$$
(9)

$$D(\mathbf{Q}, u) = \det(n \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}_{i}^{n-1}(u) (\mathbf{Q}_{i+1}^{f} - \mathbf{Q}_{i}^{f}),$$

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{Q}_{i}^{h} \mathbf{B}_{i}^{n}(u) - \sum_{i=0}^{n} \mathbf{Q}_{i}^{f} \mathbf{B}_{i}^{n}(u), n \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{B}_{i}^{n-1}(u) (\mathbf{Q}_{i+1}^{h} - \mathbf{Q}_{i}^{h})) \equiv 0$$
(10)

ここで、QはQ,を並べたベクトルである。

ベジエ曲線を用いる可展面の概念を図1に示す。2つの ベジエ曲線 $\mathbf{f}(u)$, $\mathbf{h}(u)$ は制御点 \mathbf{Q}_i^f と \mathbf{Q}_i^h により形成され, u が与えられたとき, パラメータ v を変化させて得られる 母線 $(1-v)\mathbf{f}(u) + v\mathbf{h}(u)$ は曲線上の2つの点 $\mathbf{f}(u), \mathbf{h}(u)$ を結ん だ線分になり, $\mathbf{E}_{0}^{f} \mathbf{E}_{1}^{h}, \mathbf{E}_{0}^{h} \mathbf{E}_{1}^{h}$ はそれぞれ $\mathbf{f}(u), \mathbf{h}(u)$ の接線 ベクトル $\mathbf{f}_{u}, \mathbf{h}_{u}$ になる。式(10)は母線の方向ベクトル $\mathbf{g}(u)$ と接線 $\mathbf{E}_{0}^{f} \mathbf{E}_{1}^{f}, \mathbf{E}_{0}^{h} \mathbf{E}_{1}^{h}$ が同一平面上にあることを示してい る。このことを数式で表すと以下のようになる。

 $\boldsymbol{E}_{0}^{f}\boldsymbol{E}_{1}^{f}\cdot(\boldsymbol{E}_{0}^{f}\boldsymbol{E}_{0}^{h}\times\boldsymbol{E}_{0}^{h}\boldsymbol{E}_{1}^{h})=0$ (11)



図1 ベジエ曲線で定義された可展曲面

n次のベジエ曲線では、接線ベクトルはn-1次であり、 式(11)は制御点座標の3(n-1)次の多項式である。したがっ て、定数項も含めると3n-2個の係数がある。文献 5)では、 n=2,3の場合について、それぞれ 4 次と 7 次の可展条件 式を導いた。

本研究では、数値的な最適化手法により、可展面を求める。そのため、3n-2個の異なるuの値に対して式(10)の可展条件を制約条件として与える。

2.3 **可展曲面の接合**

可展条件は曲面形状を厳しく制限するため、ベジエ曲線 を利用した可展面の形状はかなり限定されるが、複数の可 展面を接合することにより、より複雑な曲面形状を表現す ることができる。導線方向の曲面の接合については、数学 的な*Cⁱ*連続と、幾何学的な*Gⁱ*がある。建築曲面では幾何 学的な連続性が重要なので、以下の2種類の接合方法を考 える。

- 隣接する可展曲面の母線を一致させる接合方法(G⁰ 連続接合)
- 2) 2つの可展曲面が共有する母線上で,導線方向の接線 あるいは法線を導線方向に連続させる方法(G¹連 続接合)

 G^0 連続接合に比べて G^1 連続接合は滑らかに接合でき るのみではなく曲面全体を平面に展開することができる 特徴を持っているが、 G^0 あるいは G^1 は、建築意匠によっ て選択されるものと考えられる。

図 2 に示したように、曲面と制御多角形を定義すると、 G^{0} 連続接合は、ベジエ曲線 $\mathbf{f}_{1}(u) \ge \mathbf{h}_{1}(u)$ により定義され た可展面の末端 $\mathbf{Q}_{3}^{f_{1}} \mathbf{Q}_{3}^{h_{1}} \ge ベジエ曲線 \mathbf{f}_{2}(u) \ge \mathbf{h}_{2}(u)$ により 定義された可展曲面の始点 $\mathbf{Q}_{0}^{f_{2}} \mathbf{Q}_{0}^{h_{2}} \ge -$ 致させることで実 現できる。 一方, G^{l} 連続接合は, \mathbf{Q}_{2}^{h} , \mathbf{Q}_{2}^{h} , \mathbf{Q}_{3}^{h} (\mathbf{Q}_{0}^{h}), \mathbf{Q}_{3}^{h} (\mathbf{Q}_{0}^{h}), \mathbf{Q}_{1}^{h} , \mathbf{Q}_{1}^{h} が同一平面にある条件により実現すること ができる。それぞれの曲面ですでに可展条件を満たし ているので, この条件は, 3 つのベクトル, $\mathbf{Q}_{3}^{h} - \mathbf{Q}_{2}^{h}$, $\mathbf{Q}_{3}^{h} - \mathbf{Q}_{3}^{h}$, ($\mathbf{Q}_{0}^{h} - \mathbf{Q}_{0}^{h}$), $\mathbf{Q}_{3}^{h} - \mathbf{Q}_{1}^{h}$ のスカラー3 重積が 0 になる条件として定式化できる。



図2 ベジエ曲線で定義された可展曲面接合

3. 最適化問題

最大主応力の最小化することにより,可展面で形成され るシェルの材料を最も効率的に利用することができる。ベ ジエ曲線で導線を表現し,その制御点座標を設計変数とす る。また,可展条件と連続条件を制約条件とする。

最適化手法は,非線形計画法の一つである逐次2次計画 法とする。ただし,最大主応力を生じる要素は,最適化の 過程で変化するため,目的関数の値と感度係数が不連続と なる。そのため, *p*-ノルムを用いて目的関数をスムージン グする。

以上より,最大主応力を最小化することを目的した形状 最適化問題は次のように定式化できる。

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{Q}} & H(\mathbf{Q}) = \left[\sum_{i=1}^{m} (\sigma_{\max,i}(\mathbf{Q}))^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \\ \text{s. t. } & D_{k}(\mathbf{Q}, u_{i}) = 0, \quad (k = 1, \dots, q; \ i = 1, \dots, 3n - 2) \\ & S_{1i}(\mathbf{Q}) = 0, \quad (i = 1, \dots, s_{1}) \\ & S_{2i}(\mathbf{Q}) = 0, \quad (i = 1, \dots, s_{2}) \\ & \mathbf{Q}^{L} \le \mathbf{Q} \le \mathbf{Q}^{U} \end{cases}$$
(12)

ここで、 $\sigma_{\max,i}(\mathbf{Q})$ は種々の荷重条件に対する各要素の上下面での主応力の絶対値の最大値の*i*番目に大きい値である。したがって、目的関数 $H(\mathbf{Q})$ はm番目までの最大主応力のp-ノルムである。pは近似精度を定めるパラメータであり、 \mathbf{Q}^{\prime} 、 \mathbf{Q}^{\prime} は \mathbf{Q} の上・下限値のベクトルである。 $S_{1i}(\mathbf{Q}) = 0 \geq S_{2i}(\mathbf{Q}) = 0$ はそれぞれ s_1 個の接合線での G^0 連続条件、 s_2 個の接合線での G^1 連続条件を表している。なお、 G^0 連続条件は、ベジエ曲面の制御点を接続線で共有することにより満たすことができる。また、可展条件は非常に厳しい条件であるため、形状の変化を制限するために $\mathbf{Q}^{\prime} \geq \mathbf{Q}^{\prime}$ を厳しい値とすると、許容解が存在しなくなる。

さらに、式(12)の目的関数を求めるためには構造解析要で あり、多くの計算量を要する。そのため、まず、簡単に評 価できる幾何学的な特性量 $G(\mathbf{Q})$ を目的関数として最適 化を実行し、許容解が存在することを確認できれば、 $H(\mathbf{Q})$ を目的関数として最適形状を求める。

弾性構造解析には OpenSees を利用し,最適化には Snoptを用いる。感度係数は,差分近似する。形状最適化 のアリゴリズムは以下とおりである。

Step 1 建築設計と構造計画の条件により,境界条件, 材料定数などを決める。

Step 2 建築意匠に応じて、ベジエ曲面の連続条件の種類を定めて、制御点の初期値と上下限値**Q**^{*u*} , **Q**^{*L*} を設定する。

Step 3 $G(\mathbf{Q})$ を目的関数として最適化を実行し、許容 解が存在しなければ、Step 2 に戻って $\mathbf{Q}^{\prime\prime}$ 、 \mathbf{Q}^{L} を変更す る。

Step 4 *H*(**Q**)を目的関数として最適形状を求める。

4. 数值計算例

4.1 最適化の概要

本節では、3次ベジエ曲線を用いて表現した単純な可展 面モデル、4つの可展曲面をG⁰、G¹連続接合したモデル、 導線方向により複雑な形状持っている接合可展面モデル の形状を最適化する。これらの計算例を通じて、可展面を 接続した自由曲面シェル構造の形状最適化手法の有効性 を検証するとともに、最適解の特性を考察する。ここで、 式(10)の可展条件を与える7個のパラメータ値は、各部分 曲面について u=0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 0.9 である。

設計外力は、鉛直方向には自重を x, y 水平方向には地 震荷重を想定した自重の 0.3 倍の荷重を作用させる。曲面 の非対称性を考慮すると、荷重条件は、自重、自重 $\pm x$ 方 向地震荷重、自重 $\pm y$ 方向地震荷重の 5 ケースである。曲 面シェル構造は厚さ 0.2 m のコンクリートを採用し、その ヤング係数、ポアソン比および比重はそれぞれ 24 GPa, 0.2, 24.5 kN/ m^3 とする。また、式(12)において、m=10, p=10 で あり、仮の目的関数 $G(\mathbf{Q})$ はシェルの表面積とする。各部 分曲面のパラメータuとvをそれぞれ 10 等分して 4 辺形 シェル要素を生成する。

4.2 単純可展曲面モデル

60.0×40.0m の矩形平面を持つシェルを図 3-1 に示す。シ ェルは図 3-1(a)に示す4つの隅点 A, B, C, D でピン支持され ている。図 3-1(b)は、初期制御点 A₀, A₁, A₂, A₃ と B₀, B₁, B₂, B₃ による3次ベジェ曲線 f(u), h(u)を導線とした初期曲面構造 の斜投影図である。また、本モデルでは4つの支持点の位 置を固定して形状最適化を行なう。

図 3-2(a), 図 3-2(b)はそれぞれ最適形状の平面図と斜投 影図である。図から分かるように最適形状は初期形状と比 べて前面の導線が低くなり,背面の導線が高くなっている。 一方,初期形状の応力最大値は 10.808 MPa であるのに対



し、最適形状の応力最大値は 2.238 MPa であり、初期形状 の 20.7%まで減少している。図 3-3(a)、図 3-3(b)は各荷重 ケースにおける応力のうち最大の値を選択して描画した 等応力線図である。線の目盛りは省略するが、線の密度か ら応力分布が均等化に向かってかなり改善されているこ とが確認できる。



図 3-3 単純可展曲面の応力分布

4.3 G⁰, G¹連続接合可展曲面モデル

60.0×40.0mの矩形設計領域に図 4-1(a)のように平面を 決定し,8つの点A,B,C,D,E,F.G,Hで支持する。4 隅以外 の支持点の位置を固定しないことにして可展条件の満足 化を容易にする。図 4-1(b)は初期形状の斜投影図であり, 曲面は4つの可展面から構成されている。



母線方向には G^0 連続接合とし、導線方向にはそれぞれ G^0 , G^1 接合を連結条件として検討する。平面図において



左側の曲面の導線の終点と右側の曲面の始点を重複させ て,上側と下側のベジエ曲面は中央の導線を共有するよう に設定する。

図 4-2(a), 図 4-2(b)はそれぞれ G^{0} 連続接合の最適形状の 平面図と斜投影図を表し, 図 4-3(a), 図 4-3(b)はそれぞれ G^{1} 連続接合の最適形状の平面図と斜投影図である。図から分 かるように,初期構造は同じであるが,連結条件が異なる ことで全く異なる最適形状が得られている。 G^{1} 連続接合 の場合,曲面が滑らかに連結されている。



(a)初期形状応力分布図



図 4-4 接合可展曲面の応力分布図

初期形状の応力最大値は 21.035 MPa であるのに対し, G^0 連続接合の最適形状の応力最大値は 0.411 MPa, G^1 連 続接合の場合は 5.986 MPa であり, それぞれ初期形状の 4.0%, 28.4%まで減少している。 G^1 連続接合は G^0 連続接 合より連続条件が厳しいため,最大応力の減少が少ないと 考えられる。各荷重ケースにおける応力のなかの最大値を 図 4.4 に示す。図(a), (b), (c)は、それぞれ初期形状、 G^{0} 連 続最適形状、 G^{1} 連続最適形状の等応力線図である。図か ら分かるように、 G^{0} 連続と G^{1} 連続ともに、応力分布の均 等化に向かって改善されているが、 G^{0} 連続のほうが大き く改善されている。ただし、曲面の連続性は、建築意匠と 大きく関連する。

5. **まとめ**

本研究を通じて得られた知見を以下にまとめる。

- ベジエ曲線で形成された可展曲面を G⁰, G¹連続接合で 連結することにより,建築意匠を十分に反映できる多様 な可展曲面を生成することができる。
- 2) 最適化過程でベジエ曲線の制御点を設計変数とし,可 展条件を数値的な制約条件として与えることにより,効 率よく最適形状を求めることができる。
- 3) 最大主応力を低減することにより、曲面全体の応力分 布を大幅に改善できる。

謝辞

本研究は, JSPS 科研費 16K14338 の助成を受けた。 ここに記して謝意を表する。

[参考文献]

- 佐々木睦朗: RC 自由曲面シェルの構造デザイン,力学・素材・ 構造デザイン-4章,建築技術,2012.1
- 2) Kodai Nagata, Toshio Honma, Multi-objective Optimization for Free Form Surface Shell Using Swarm Intelligence with Decent Solutions Search. IASS2016, 1120.
- 3) 關和也, 大崎純, 藤田慎之輔, 線織面を接合した自由曲面シェ ルの形状最適化, 日本建築学会大会(近畿), pp. 23-26, No. 11011, 2014.9
- 4) 關和也,大崎純,藤田慎之輔,応力最小化を目的とした線織面 シェルの形状最適化,日本建築学会情報システム技術委員会, H59, pp.316-318, 2014
- 5) 中村圭吾, 大崎純, 可展面を接合した自由曲面シェルの形状最 適化, 日本建築学会大会(九州), B1, pp. 1077-1078, No. 20539, 2016.8
- C.-H. Chu and C. H. Sequin, Developable Bezier patches: Properties and design, Computer-Aided Design, 34, pp. 511-527, 2002.
- *1 京都大学大学院工学研究科 大学院生(M.Sc)
- *2 京都大学大学院工学研究科 教授 博士(工学)
- *3 京都大学大学院工学研究科 大学院生