

2次錐計画の定式化に基づく極限解析によるリンク機構の設計法

○山岡 祐貴*¹ 大崎 純*²
寒野 善博*³

キーワード：リンクメカニズム 2次錐計画問題 塑性極限解析

1. 序

リンクメカニズムは、面材や棒材などの剛な部材をピン接合することで構成され、外力を作用させずに変形する不安定な構造である。解析的定式化や数値的アルゴリズムに基づくリンクメカニズムの設計手法は多く提案されているが、その手法のほとんどは平面のメカニズムへの適用に限られる。

第2および第3著者らは、塑性極限解析に基づく部分剛接合骨組の3次元メカニズムの生成手法を提案した¹⁾。しかし、この手法ではヒンジの方向を局所座標軸まわりの回転に限定していた。第2著者らは、2次計画問題を解くことによって、任意方向のヒンジを有するメカニズムが得られることを示した²⁾。

本研究では、まず、下界定理に基づき部材端モーメントに対する2次の降伏関数をもつ極限解析問題と等価な2次錐計画(SOCP)問題を定式化する³⁾。その双対問題は、上界定理に基づく極限解析問題とみなすことができ、変位成分の不等式制約を加えることで、望ましい微小変形機構が得られることを示す。

2. 研究の概要および変数の定義

材端に完全弾塑性ヒンジをもつことができる剛接合骨組を考える。極限解析問題を解くことで、塑性ヒンジの場所と方向を求めて、その塑性ヒンジを不安定なヒンジに置換する。このようにして、極限解析問題を解くことによって得られる塑性崩壊メカニズムは、微小変形のリンクメカニズムとなる^{1,2)}。

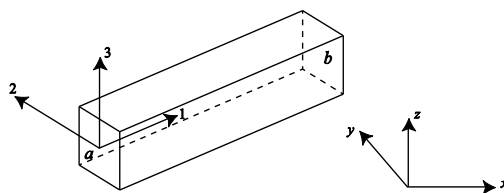


図1: 部材座標と全体座標の定義

図1に示すように、両端の節点aとbと部材座標を定義する。また、図2に示すように材端力を定義する。部材kの節点aとbの軸力 N^k とねじりモーメント T^k は同じ大きさで逆向きである。節点 $i \in \{a, b\}$ の軸2,3まわりの曲げモーメントを $M_{i2}^{(k)}$, $M_{i3}^{(k)}$ とする。それぞれの部材は、釣

合い式を用いて材端せん断力を削除することにより、6つの独立な材端力成分をもつ。

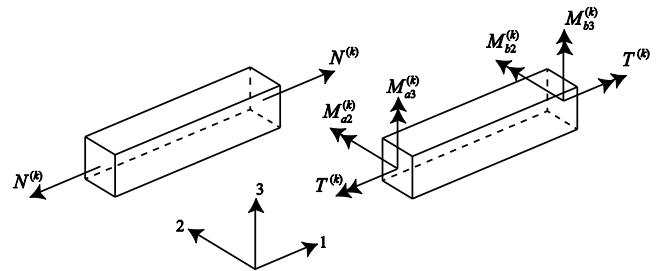


図2: 6つの独立な材端力

m 個の部材の材端ベクトルを $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_2)^T$ とすると、 \mathbf{f} のそれぞれの成分は $N^{(k)}$, $M_{a2}^{(k)}$, $M_{a3}^{(k)}$, $M_{b2}^{(k)}$, $M_{b3}^{(k)}$, $T^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, m$)に対応する。固定した自由度を取り除いた自由度の数を n とし、節点力ベクトルを $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$ とする。局所座標の軸と部材長方向余弦を用いることで \mathbf{h}_i を定義し、釣合い行列を $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{6m})$ とすると、釣合い式は次のように書ける。

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{p} \quad (1)$$

材端の一般化ひずみベクトルを $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{6m})$ とすると、 f_i が軸力、ねじりモーメントあるいは軸2, 3まわりの曲げモーメントのとき、 c_i は部材の伸びと材端での軸1, 2, 3まわりの回転に対応する。ベクトル \mathbf{c} と変位ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ の間には、適合行列 $\mathbf{H}^T = (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{6m})^T$ を用いて次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{c} = \mathbf{H}^T \mathbf{u} \quad (2)$$

3. 2次錐計画(SOCP)問題

リンクメカニズムを生成することを目的として、2次の降伏関数をもつ塑性極限解析問題を定式化するため、降伏軸力と完全塑性モーメントを表す上限値を、それぞれの部材端における軸力と3つのモーメントの成分の2乗和としてそれぞれ与える。軸降伏する部材は不要な部材とし除去する。入力節点に強制変位を与えることで出力節点が望む方向に動くようにリンクメカニズムを生成する。荷重ベクトルは入力と出力の自由度にそれぞれ対応する成分が非ゼロで、その他の成分がゼロであり、 \mathbf{p}_{in} , \mathbf{p}_{out} と表す。材端モーメントのベクトル $\mathbf{m}_a^{(k)}$, $\mathbf{m}_b^{(k)}$ は次のように定義

される。

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_a^{(k)} &= \left(-T^{(k)}, M_{a2}^{(k)}, M_{a3}^{(k)}\right)^T, \\ \mathbf{m}_b^{(k)} &= \left(T^{(k)}, M_{b2}^{(k)}, M_{b3}^{(k)}\right)^T\end{aligned}\quad (3)$$

変数 $N^{(k)}$, $\mathbf{m}_a^{(k)}$, $\mathbf{m}_b^{(k)}$ は, $\mathbf{C}_0^{(k)} \in \mathbb{R}^{1 \times 6m}$ と $\mathbf{C}_a^{(k)} \in \mathbb{R}^{3 \times 6m}$, $\mathbf{C}_b^{(k)} \in \mathbb{R}^{3 \times 6m}$ を用いて \mathbf{f} と次式のように関係づけられる。

$$N^{(k)} = \mathbf{C}_0^{(k)} \mathbf{f}, \quad \mathbf{m}_a^{(k)} = \mathbf{C}_a^{(k)} \mathbf{f}, \quad \mathbf{m}_b^{(k)} = \mathbf{C}_b^{(k)} \mathbf{f} \quad (4)$$

以上より, 極限解析問題は, SOCP 問題として次のように定式化できる。

$$\begin{aligned}\text{maximize } & \lambda_{\text{in}} \\ \text{subject to } & \mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{p}_{\text{out}} + \lambda_{\text{in}} \mathbf{p}_{\text{in}} \\ & \|\mathbf{C}_j^{(k)} \mathbf{f}\| \leq \alpha w_m, \quad (k=1, \dots, m; j \in \{a, b\}) \\ & |N^{(k)}(\mathbf{f})| \leq \alpha w_f, \quad (k=1, \dots, m)\end{aligned}\quad (5)$$

ただし, w_m と w_f はモーメントと軸力に対する重み係数であり, α はスケールパラメータである。

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mu_0^{(k)}$, $\mu_a^{(k)}$, $\mu_b^{(k)}$, $\kappa_0^{(k)}$, $\kappa_a^{(k)} \in \mathbb{R}^3$, $\kappa_b^{(k)} \in \mathbb{R}^3$ を, 問題(5)における制約条件のラグランジュ乗数とすると, $\mu_0^{(k)}$, $\mu_a^{(k)}$, $\mu_b^{(k)}$, $\kappa_0^{(k)}$, $\kappa_a^{(k)}$, $\kappa_b^{(k)}$ の実行可能領域は次の不等式によって定義される。

$$\begin{aligned}\mu_0^{(k)} &\geq \|\kappa_0^{(k)}\|, \quad \mu_a^{(k)} \geq \|\kappa_a^{(k)}\|, \\ \mu_b^{(k)} &\geq \|\kappa_b^{(k)}\|, \quad (k=1, \dots, m)\end{aligned}\quad (6)$$

詳細は省略するが³⁾, ラグランジアン L の停留条件から次の各式が得られる。

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{\text{in}}} = 1 - \mathbf{p}_{\text{in}}^T \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{f}} &= \mathbf{H}^T \mathbf{u} - \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_0^{(k)T} \kappa_0^{(k)} - \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_a^{(k)} \kappa_a^{(k)} \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_b^{(k)} \kappa_b^{(k)}\end{aligned}\quad (8)$$

式(6)に式(7), (8)を代入して, 式(6)が最適解において等号で成立することを用いると, 双対問題を次のように定式化できる。

$$\begin{aligned}\text{minimize } & -\mathbf{p}_{\text{out}}^T \mathbf{u} + \sum_{k=1}^m \alpha w_f \|\kappa_0^{(k)}\| + \sum_{k=1}^m \alpha w_m \|\kappa_a^{(k)}\| \\ & + \sum_{k=1}^m \alpha w_m \|\kappa_b^{(k)}\| \\ \text{subject to } & \mathbf{p}_{\text{in}}^T \mathbf{u} = 1\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^T \mathbf{u} &= \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_0^{(k)T} \kappa_0^{(k)} + \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_a^{(k)T} \kappa_a^{(k)} \\ & + \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_b^{(k)T} \kappa_b^{(k)}\end{aligned}$$

ここで, 行列 $\mathbf{C}_0^{(k)}$, $\mathbf{C}_a^{(k)}$, $\mathbf{C}_b^{(k)}$ は, 1つの部材の材端力を並べたベクトル $\mathbf{f}^{(k)} = \left(N^{(k)}, T^{(k)}, M_{a2}^{(k)}, M_{a3}^{(k)}, M_{b2}^{(k)}, M_{b3}^{(k)}\right)^T$ に対応する行列 $\mathbf{D}_0 \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$, $\mathbf{D}_a \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$, $\mathbf{D}_b \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ に縮約でき, $\mathbf{f}^{(k)}$ に対応する一般化ひずみベクトル $\mathbf{c}^{(k)} = \left(c_1^{(k)}, \dots, c_6^{(k)}\right)^T$

は次のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} c_1^{(k)} \\ c_2^{(k)} \\ c_3^{(k)} \\ c_4^{(k)} \\ c_5^{(k)} \\ c_6^{(k)} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{D}_0^T \kappa_0^{(k)} + \mathbf{D}_a^T \kappa_a^{(k)} + \mathbf{D}_b^T \kappa_b^{(k)}\right) = \begin{pmatrix} \kappa_0^{(k)} \\ -\kappa_{a1}^{(k)} + \kappa_{b1}^{(k)} \\ \kappa_{a2}^{(k)} \\ \kappa_{a3}^{(k)} \\ \kappa_{b2}^{(k)} \\ \kappa_{b3}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (10)$$

ただし, $\kappa_{ai}^{(k)}$ と $\kappa_{bi}^{(k)}$ はそれぞれ $\kappa_a^{(k)}$ と $\kappa_b^{(k)}$ の i 番目の成分である。式(10)から, ねじり回転角は節点 a と b の部材軸まわりの回転角 $\kappa_{a1}^{(k)}$ と $\kappa_{b1}^{(k)}$ の差で定義される。

Ohsaki *et al.*¹⁾ の手法と同様にして, 次の補助的な SOCP 問題を解くことでパラメータ α の下限を求める。

$$\begin{aligned}\text{maximize } & \mu \\ \text{subject to } & \mathbf{H}\mathbf{f} = \mu \mathbf{p}_{\text{out}} \\ & \|\mathbf{C}_j^{(k)} \mathbf{f}\| \leq w_m, \quad (k=1, \dots, m; j \in \{a, b\}) \\ & |N^{(k)}(\mathbf{f})| \leq w_f, \quad (k=1, \dots, m)\end{aligned}\quad (11)$$

μ を問題(11)の最適値とすると, α の下限は $\alpha^L = 1/\mu$ である。

極限解析問題(5)を解き, 塑性ヒンジを不安定なヒンジに置換することでリンクメカニズムが得られる。不安定次数は釣合い行列のランクを用いることで計算できる。釣合い行列から, 固定した自由度に対応する行と存在しない部材の材端力とモーメントに対応する列を取り除いた行列を \mathbf{H} とする。取り除いた材端力とモーメントは材端力ベクトル \mathbf{f} からも取り除く。部材 k の節点 a, b における斜めヒンジの方向 $\mathbf{r}_a^{(k)}$, $\mathbf{r}_b^{(k)}$ と材端モーメントのベクトル $\mathbf{f}_a^{(k)}$, $\mathbf{f}_b^{(k)}$ の間に次の各式が成立する。

$$\mathbf{r}_a^{(k)T} \mathbf{f}_a^{(k)} = 0, \quad \mathbf{r}_b^{(k)T} \mathbf{f}_b^{(k)} = 0 \quad (12)$$

全てのヒンジに対する式(12)をまとめて $\mathbf{R}^T \mathbf{f} = \mathbf{0}$ とすると, ヒンジをもつ構造の釣合い式は次のように導ける。

$$\mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{R}^T \end{pmatrix} \quad (13)$$

行列 \mathbf{G} の行数と列数を g_r , g_c とする。また, \mathbf{G} のランクを r とすると, 不静定次数と不安定次数は $g_c - r$, $g_r - r$ である。ゼロの特異値の左特異ベクトルを Ψ とすると,

$(\mathbf{H}^T, \mathbf{R})\Psi = \mathbf{0}$ の関係から, Ψ のそれぞれの成分は, 部材

の伸びとヒンジの回転である \mathbf{R}^T の成分に対応する一般化ひずみとなる。

$\mathbf{f}^{(k)}$ と $\mathbf{r}_a^{(k)} = (r_{a1}^{(k)}, r_{a2}^{(k)}, r_{a3}^{(k)})$, $\mathbf{r}_b^{(k)} = (r_{b1}^{(k)}, r_{b2}^{(k)}, r_{b3}^{(k)})$ を用いて、部材 k に対応する式(12)は次のように表現できる。

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_{a1}^{(k)} & r_{a2}^{(k)} & r_{a3}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & r_{b1}^{(k)} & 0 & 0 & r_{b2}^{(k)} & r_{b3}^{(k)} \end{pmatrix} \mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (14)$$

$\theta_a^{(k)}$ と $\theta_b^{(k)}$ が部材 k の節点 a と b のヒンジの回転角に対応するひずみ成分とすると、節点 a と b の軸 2, 3 まわりの回転は、 $\theta_a^{(k)} r_{a2}^{(k)}$, $\theta_a^{(k)} r_{a3}^{(k)}$, $\theta_b^{(k)} r_{b2}^{(k)}$, $\theta_b^{(k)} r_{b3}^{(k)}$ と表現でき、部材のねじれ角は $-\theta_a^{(k)} r_{a1}^{(k)} + \theta_b^{(k)} r_{b1}^{(k)}$ と計算できる。

ところで、問題(5)あるいは(9)を単に解くと、入出力節点近くで局所的に変形するメカニズムが得られることが多い。そこで、次のように問題(9)に不等式制約条件 $\mathbf{A}\mathbf{u} \geq \mathbf{b}$ を追加する。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } -\mathbf{p}_{\text{out}}^T \mathbf{u} + \sum_{k=1}^m \alpha w_f \|\boldsymbol{\kappa}_0^{(k)}\| + \sum_{k=1}^m \alpha w_m \|\boldsymbol{\kappa}_a^{(k)}\| \\ & \quad + \sum_{k=1}^m \alpha w_m \|\boldsymbol{\kappa}_b^{(k)}\| \\ & \text{subject to } \mathbf{p}_{\text{in}}^T \mathbf{u} = 1 \\ & \quad \mathbf{H}^T \mathbf{u} = \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_0^{(k)T} \boldsymbol{\kappa}_0^{(k)} + \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_a^{(k)T} \boldsymbol{\kappa}_a^{(k)} \\ & \quad + \sum_{k=1}^m \mathbf{C}_b^{(k)T} \boldsymbol{\kappa}_b^{(k)} \\ & \quad \mathbf{A}\mathbf{u} \geq \mathbf{b} \end{aligned} \quad (15)$$

問題(15)の双対問題は次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \lambda_{\text{in}} + \mathbf{b}^T \mathbf{s} \\ & \text{subject to } \mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{p}_{\text{out}} + \lambda_{\text{in}} \mathbf{p}_{\text{in}} + \mathbf{A}^T \mathbf{s} \\ & \quad \|\mathbf{C}_j^{(k)} \mathbf{f}\| \leq \alpha w_m, \quad (k=1, \dots, m; j \in \{a, b\}) \\ & \quad |N^{(k)}(\mathbf{f})| \leq \alpha w_f, \quad (k=1, \dots, m) \\ & \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、問題(16)の変数ベクトル \mathbf{s} の成分は接触力とみなすことができ、問題(15)の最適解において、不等式制約条件 $\mathbf{A}\mathbf{u} \geq \mathbf{b}$ の多くの成分が等式で満たされるときには、得られるメカニズムの不安定次数が大きくなるものと考えられる。

4. メカニズムの生成例

提案手法の有用性を示すため、斜めヒンジを有するメカニズムを生成する。

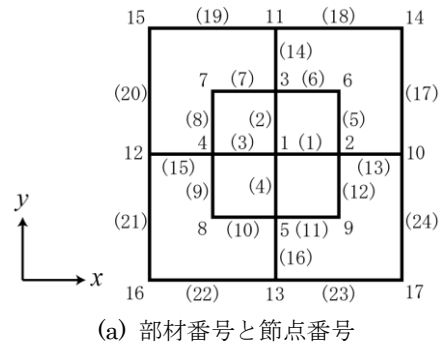
骨組のモデルのサイズは任意に変更でき、リンクメカニズムの変形には力を加える必要がないため、下記の例では

力と長さの単位はそれぞれ N と m として省略する。2次錐計画問題を解くための特別なパッケージは用いず、問題(15)を逐次2次計画法のライブラリー-SNOPT Ver. 7.2⁴⁾を用いて解く。ここで、感度係数は差分近似する。行列 \mathbf{G} の特異値分解には MATLAB R2013a⁵⁾を用いる。

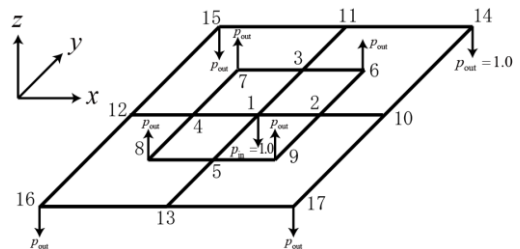
最適化問題(15)を解いて得られるメカニズムは微小変形のメカニズムなので、ABAQUS Ver. 6.14⁶⁾を用いて大変形解析を行い、大変形メカニズムの可能性を検証する。ここで、入力節点の変位を経路パラメータ t とし、 t を 0 から 1 まで増加させて、最終形状を求める。材料はヤング率 200 GPa の鋼材とし、断面は半径 50mm、厚さ 2mm の円筒とする。長さがゼロの要素 CONN3D2 を用いて任意方向のヒンジをモデル化する。非線形解析の結果においては力と長さの単位を示す。

モデル 1

図 3(a) のような一辺 4 の直交格子の中に、一辺 2 の直交格子を有するモデルを考える。節点 2, 4 を y, z 方向に支持し、節点 3, 5 を x, z 方向に支持する。節点 1 を z 軸負の方向に移動させたとき、節点 6, 7, 8, 9 が z 軸正、節点 14, 15, 16, 17 が z 軸負の方向にそれぞれ移動するメカニズムを生成する。また、メカニズムとして節点を移動させたい方向に初期の節点位置を移動すると、極限解析時にヒンジが生成されやすいことが経験的にわかっていたため、入出力節点をそれぞれ入出力荷重の方向に 0.01 移動させた。重み係数 w_m と w_f はそれぞれ 1.0 と 10.0 とする。問題(11)を解くと $\mu = 1.0000$ であり、 α の下限値は $1/1.0000 = 1.0000$ となるので、 $\alpha = 1.0$ を用いる。



(a) 部材番号と節点番号



(b) 入力荷重と出力荷重

図 3: 2つの直交格子を組み合わせたモデル

主問題(5)を解くと、節点 6~9 が z 方向に移動しなかつ

たため、節点の変位制約を加えた双対問題(15)を解く。変位の制約条件として、節点 6~9 に z 方向変位が 0.5 以上、節点 14~17 に z 方向変位が -0.5 以下となるようにそれぞれ不等式制約を加える。問題(15)を解くと、節点 6~9 の z 方向変位の不等式制約は等号で成立し、節点 14~17 の z 方向変位の不等式制約は満たされた。ヒンジの位置を図 4 の太線で示す。

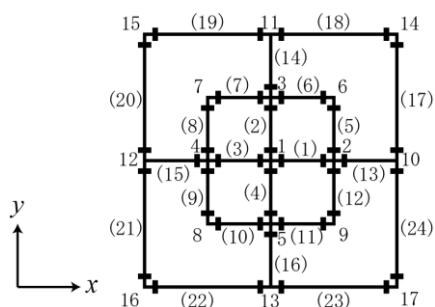
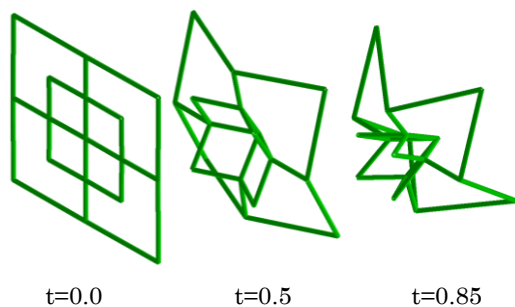
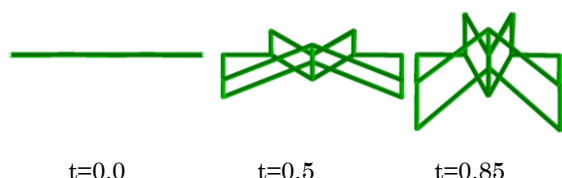


図 4: ヒンジの位置



(a) 斜めから見た図



(b) 横から見た図

図 5: 変形プロセス

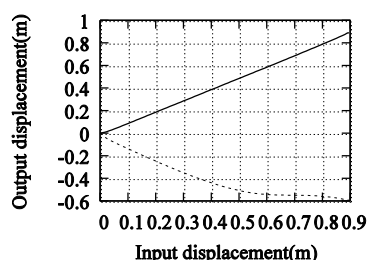


図 6: 節点 1 の z 軸負方向変位と節点 6,14 の z 方向変位の関係; 実線: 節点 6, 破線: 節点 14.

行列 \mathbf{G} の特異値分解で得られた不安定次数は 7, 不静定次数は 13 である。大変形解析を行った結果、図 4 の機構の節点 3, 5 に x 軸方向の反力が発生したため、大変形解析時の支持条件を変更する。節点 2 で x, y, z 方向変位を拘束し、節点 4 で y, z 方向変位を拘束し、節点 3, 5 で z 方向変位を拘束する。その結果、大変形時でも反力は発生しな

かった。変形プロセスを図 5 に示す。節点 1 の z 軸負方向変位と出力変位である節点 6, 14 の z 方向変位を図 6 に示す。図より、節点 6, 14 は z 軸方向正と負にそれぞれ移動していることが確認できる。

5. 結論

骨組構造の極限解析問題を 2 次錐計画(SOCP)問題として定式化し、その主問題あるいは双対問題を解くことでメカニズムを生成する手法を提案した。本研究で得られた成果は以下の通りである。

1. 極限解析の下限定理と上限定理に対応する SOCP 問題の主問題と双対問題をそれぞれ解いて、塑性ヒンジを不安定なヒンジに置換することでリンクメカニズムが得られる。その際、材端モーメントと軸力の 2 次の降伏関数を用いることによって、任意方向のヒンジを有するメカニズムを生成することが可能である。
2. 主問題の最適解として、局所座標軸まわりの部材端モーメントや回転角からヒンジの方向が得られる。一方、双対問題の最適解として、材端ひずみからヒンジの方向を求めることができる。また、部材の 2 材端を通る部材軸まわりの回転角の差によって部材のねじり回転角が得られる。
3. 入出力節点近くで局所的に変形するメカニズムが得られたときには、双対問題において不等式制約条件を加えることで、全体的に変形するメカニズムが得られる。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 26420557 の助成を受けた。ここに記して謝意を表する。

[参考文献]

- 1) M. Ohsaki, Y. Kanno and S. Tsuda, Linear programming approach to design of spatial link mechanism with partially rigid joints, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 50, pp. 945-956, 2014.
- 2) M. Ohsaki, S. Tsuda and Y. Miyazu, Design of linkage mechanisms of partially rigid frames using limit analysis with quadratic yield functions, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 88-89, pp. 68-78, 2016.
- 3) Y. Yamaoka, M. Ohsaki and Y. Kanno, Optimization approach to design of linkage mechanisms with arbitrarily inclined hinges, *Proc. ACSMO 2016, Nagasaki, Japan*, Paper No. 1D2-3, 2016.
- 4) P. E. Gill, W. Murray and M. A. Saunders, SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM J. Opt.*, Vol. 12, pp. 979-1006, 2002.
- 5) MathWorks, *Matlab User's Manual Ver. R2013a*, 2013.
- 6) Dassault Systèmes, *ABAQUS User's Manual Ver. 6.15*, 2015.

*1 京都大学大学院工学研究科 大学院生

*2 京都大学大学院工学研究科 教授 博士(工学)

*3 東京工業大学科学技術創成研究院 准教授 博士(工学)