

ロバスト最適化の視点でみるシェイクダウン解析法について

寒野 善博

キーワード：シェイクダウン解析 Melan の定理 ロバスト最適化 半正定値計画 2 次錐計画

1. はじめに

弾塑性問題は、载荷経路に依存する発展方程式型の問題であるから、一般には増分問題を逐次的に解いて構造物の変形を求める必要がある。一方で、構造物に作用し得る荷重の限界値や終局状態における構造物の変形状態を評価する手法として、直接法 (direct method) と総称されるものがある^{10,24)}。直接法では载荷経路に依存しない問題を扱うため、逐次的な増分解析を経ることなく構造物の終局状態を予測することができる。代表的な直接法として、極限解析やシェイクダウン解析がある。

繰り返し荷重が作用する弾塑性体の挙動が、最終的に弾性変形のみ収束する現象を、弾性シェイクダウンという。弾性シェイクダウン解析は、弾塑性体が弾性シェイクダウンできるような繰り返し荷重の荷重領域の大きさの最大値 (これをシェイクダウン限界荷重とよぶ) を求める直接法である。シェイクダウン限界荷重には、Melan²⁰⁾ による下界定理と Koiter^{15,16)} による上界定理とが知られており、これらが弾性シェイクダウン解析の基礎を与えている。

シェイクダウン解析は最適化手法と密接な関係がある。1960 年代の終わりには、Maier¹⁸⁾ により Melan の下界定理が線形計画として定式化できることが示されている。ただし、ここでは降伏関数を区分的線形関数で近似し、繰り返し荷重がとり得る荷重領域は (有界な) 多面体であることを仮定している。その後、温度応力や動的な効果を取り入れた解析法が展開されたが、長い間、シェイクダウン解析法はこの二つの仮定に基づいていた¹⁷⁾。

半正定値計画や 2 次錐計画などを含む錐計画^{1,4,25)} の理論と解法が成熟しソフトウェアが整備されてくるのに伴い、2000 年代に入ると線形計画に代わって錐計画を用いたシェイクダウン解析法が提案されはじめる。Bisbos *et al.*⁷⁾ は von Mises の降伏条件を、また Makrodimopoulos¹⁹⁾ は Ilyushin および Drucker-Prager の降伏条件を仮定した場合に、シェイクダウン解析 (下界定理) が 2 次錐計画で定式化できることを示した。同様に、Tresca や Mohr-Coulomb の降伏条件を仮定した場合には、シェイクダウン解析は半正定値計画として定式化できることが知られている^{5,8)}。これらの定式化では、繰り返し荷重がとり得る値の領域を (有界な) 多面体と仮定する。一方、Bisbos and Ampatzis⁶⁾ は、荷重領域を楕円体とし、降伏関数を区分的線形関数とした場合に、シェイクダウン解析が線形計画に帰着できることを示した。

さらに、楕円体の荷重領域と von Mises の降伏関数に対するシェイクダウン解析は半正定値計画に帰着できる²⁶⁾。

本稿では、シェイクダウン解析をロバスト最適化問題とみなすことにより、既往のシェイクダウン解析の定式化が整理されることを説明する。なお、ロバスト最適化には機械学習などの分野にも自然な応用があることが知られている²²⁾。

2. ロバスト最適化とは

最適化問題の定式化には、通常は、意思決定に関わる未知数 (設計変数) とデータとして与えられる定数とが含まれる。しかし、現実の意思決定問題では、データは必ずしも一つの値に定まっているわけではない。たとえば、構造物に作用する外力をデータと考えたとき、将来の外力の予測値をある一つの値に絞りきることは難しい。ロバスト最適化は、データがとり得る値がある範囲をばらつき得ると想定し、その範囲の中で最悪の状況に備えた意思決定を行う方法論である^{2,3,11)}。

ロバスト最適化の概要を説明するために、最適化問題

$$\text{Minimize } f(\mathbf{x}) \quad (1a)$$

$$\text{subject to } g_i(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (1b)$$

を考えてみる。ただし、設計変数は $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ であり、 $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^k$ は制約関数に含まれるデータであるとする。ここで、 $\bar{\mathbf{u}}$ は本来は不確かさを含むパラメーター $\mathbf{u}$ の予測値であると考えよう。そして、予測値を一つの値 $\bar{\mathbf{u}}$ に絞り込むのは困難であるものとして、 $\mathbf{u}$ のばらつきを考慮し、そのとり得る範囲として集合 $\mathcal{U}$ を指定することにする。このとき、ロバスト最適化問題は次のように定式化される：

$$\text{Minimize } f(\mathbf{x}) \quad (2a)$$

$$\text{subject to } g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0 \quad (\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2b)$$

つまり、ロバスト最適化問題では、想定しているすべてのケースで制約が満たされることを要請することで、不確実なパラメーターの変動に対して頑健な意思決定を見出すことを目指している。制約 (2b) は

$$\max\{g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{U}\} \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

とも書き直せる。(3) の表現は、想定した中で最悪のケースでも制約が満たされることを保証していると解釈できる。

3. ロバスト線形計画とシェイクダウン解析

ロバスト制約 (2b) の特別な場合として、ロバスト線形制約

$$\mathbf{u}_i^\top \mathbf{x} - b_i \leq 0 \quad (\forall \mathbf{u}_i \in \mathcal{U}_i) \quad (4)$$

を考える。ただし、 $\mathbf{u}_i$ のとり得る値の集合を

$$\mathcal{U}_i = \{\tilde{\mathbf{u}}_i + P_i \mathbf{z}_i \mid \|\mathbf{z}_i\| \leq 1\} \quad (5)$$

とし、 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_m$ とおく。ここで、 $\tilde{\mathbf{u}}_i$ は定ベクトル、 P_i は定行列である。いま、(5) と Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} \max\{\mathbf{u}_i^\top \mathbf{x} - b_i \mid \mathbf{u}_i \in \mathcal{U}_i\} \\ = \tilde{\mathbf{u}}_i^\top \mathbf{x} - b_i + \max\{(P_i \mathbf{z}_i)^\top \mathbf{x} \mid \|\mathbf{z}_i\| \leq 1\} \\ = \tilde{\mathbf{u}}_i^\top \mathbf{x} - b_i + \|P_i^\top \mathbf{x}\| \end{aligned}$$

が得られるので、(4) は 2 次錐制約

$$\|P_i^\top \mathbf{x}\| \leq -\tilde{\mathbf{u}}_i^\top \mathbf{x} + b_i \quad (6)$$

と等価であることがわかる²⁾。

制約 (4) を制約 (6) に書き直すことには、大きな意義がある。というのも、(4) は (条件 $\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}_i$ を満たす $\mathbf{u}_i$ は無限個あることから) 無限個の線形不等式制約であるのに対して、(6) は一つの凸制約である。このように、ロバスト最適化の枠組みでは、無限個の制約をできるだけ扱いやすい形式に変換することが重要な鍵となる。

一方、Melan の定理¹⁸⁾ に基づくシェイクダウン解析問題は、次のように定式化できる。構造物の変位の自由度を d で表し、節点外力ベクトルを $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^d$ とおく。有限要素で離散化した際の要素数を r で表し、要素 l ($l = 1, \dots, r$) の内力を σ_l で表すと、外力と内力の釣合いは、線形方程式

$$\sum_{l=1}^r H_l \sigma_l = \mathbf{f}$$

の形式で書ける、そこで、要素 l の残留応力を ρ_l で表すと

$$\sum_{l=1}^r H_l \rho_l = \mathbf{0} \quad (7)$$

が成り立つ。次に、降伏条件が

$$f(\sigma_l) \leq 0, \quad l = 1, \dots, r \quad (8)$$

と記述されるものとする。ここで、内力 σ_l は弾性変形により生じる応力（これを弾性応力とよぶ）と残留応力との和である。弾性応力は外力 $\mathbf{f}$ の関数であるから、 $\hat{\sigma}_l(\mathbf{f})$ と書くことにする。また、外力 $\mathbf{f}$ は、比例载荷の項 $\lambda \mathbf{p}$ と変動荷重の項 $\mathbf{q}$ の和で与えられるとする。ただし、 $\lambda \geq 0$ は载荷パラメータで $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ は定ベクトルであり、 $\mathbf{q}$ のとり得る値の範囲を $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d$ で表す。つまり、

$$\mathbf{f} = \lambda \mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} \in \mathcal{V} \quad (9)$$

が成り立つ。(7), (8), (9) より、シェイクダウン係数を求める問題は

$$\text{Maximize} \quad \lambda \quad (10a)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{l=1}^r H_l \rho_l = \mathbf{0}, \quad (10b)$$

$$f(\hat{\sigma}_l(\lambda \mathbf{p} + \mathbf{q}) + \rho_l) \leq 0 \quad (\forall \mathbf{q} \in \mathcal{V}), \quad l = 1, \dots, r \quad (10c)$$

と定式化できる。

ここで、 f が区分的線形関数であり、 $\mathcal{V}$ が楕円体であることを仮定する。すると、(10c) の不等式は

$$\mathbf{a}_j^\top (S_l(\lambda \mathbf{p} + \mathbf{q}) + \rho_l) \leq b_j, \quad j = 1, \dots, k \quad (11)$$

の形で表され、 $\mathcal{V}$ は

$$\mathcal{V} = \{\tilde{\mathbf{q}} + \hat{P} \mathbf{z} \mid \|\mathbf{z}\| \leq 1\} \quad (12)$$

の形で表される。ただし、 $\mathbf{a}_j$ および $\tilde{\mathbf{q}}$ は定ベクトルであり、 S_l および $\hat{P}$ は定行列であり、 b_j は定数である。そして、ロバスト制約 (4) に対する考察と同様に考えると、条件

$$\mathbf{a}_j^\top (S_l(\lambda \mathbf{p} + \mathbf{q}) + \rho_l) - b_j \leq 0, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{V}$$

は条件

$$\lambda \mathbf{a}_j^\top S_l \mathbf{p} + \mathbf{a}_j^\top (S_l \tilde{\mathbf{q}} + \rho_l) + \|\hat{P}^\top S_l^\top \mathbf{a}_j\| \leq b_j \quad (13)$$

と等価であることがわかる。ここで、(13) は変数 λ および ρ_l に関する線形不等式である。従って、(11) および (12) の設定の下でのシェイクダウン解析 (10) は、線形計画に帰着することができる。この結論は、Bisbos and Ampatzis⁶⁾ の結果に他ならない。

4. ロバスト 2 次錐制約とシェイクダウン解析

ここでは、ロバスト 2 次錐制約

$$\|A_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i + C_i \mathbf{u}\| \leq d_i \quad (\forall \mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq 1) \quad (14)$$

を考える。ただし、 A_i, C_i は定行列であり、 $\mathbf{b}_i$ は定ベクトルであり、 d_i は定数である。 $\mathbf{x}$ が条件 (14) を満たす必要十分条件は、ある $\tau \in \mathbb{R}$ が存在して条件

$$\begin{bmatrix} I & C_i & A_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i \\ C_i^\top & \tau I & O \\ (A_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i)^\top & O & d_i^2 - \tau \end{bmatrix} \text{ が半正定値} \quad (15)$$

が成り立つことであることが知られている²⁾。

条件 (14) から条件 (15) への帰着には、S 補題²¹⁾ とよばれる次の事実が用いられる。

命題 4.1. U, V を n 次の実対称行列とする．また， U の固有値のうち少なくとも 1 つは正であることを仮定する．このとき，条件

$$s^T V s \geq 0 \quad (\forall s : s^T U s \geq 0)$$

が成り立つための必要十分条件は，ある実数 $\rho > 0$ が存在して行列 $V - \rho U$ が半正定値であることである．

S 補題はロバスト最適化における基本的かつ有用な道具の一つである．実際，構造最適化においても，外力の不確実性を考慮したロバストコンプライアンス最小化問題^{9,13,23)}や，応力制約の下でのトラスのロバスト最適設計問題¹⁴⁾などにも，S 補題の応用がある．

一方，von Mises の降伏条件は，2 次錐制約を用いて自然な形で記述することができる^{7,12,27)}．つまり，von Mises の降伏条件の下でのシェイクダウン解析の制約は

$$\|T(S_I(\lambda p + q) + \rho_I)\| \leq R_I \quad (\forall q \in \mathcal{V}) \quad (16)$$

という形で書くことができる．ただし， T および S_I は定行列であり， $R_I > 0$ は定数である．さらに荷重の変動領域 $\mathcal{V}$ が (12) で与えられるような楕円体であることを仮定する．すると，(16) は本節で取り上げたロバスト 2 次錐制約と同じ形式で書くことができる．従って，(16) も (15) と同様な条件（つまり，ある行列が半正定値であるという条件）に帰着することができる．詳しくは文献²⁶⁾を参照されたい．

条件 (16) において，変動荷重 q は集合 $\mathcal{V}$ の任意の点を取り得る．楕円体 $\mathcal{V}$ に含まれる点は無限個あるため，(16) は無限個の 2 次錐制約を表している．これに対して，(15) のような条件は有限個（実際，この場合には 1 つ）の凸制約である．このように，ロバスト最適化の視点に立つことで，シェイクダウン解析を解きやすい最適化問題の形式に変換することができる．

5. おわりに

Melan の定理に基づくシェイクダウン解析では，変動領域に含まれるすべての荷重に対して降伏条件が成立することが要請される．想定される荷重の領域には通常は無限個の点が含まれることから，シェイクダウン解析は無限個の制約をもつ最適化問題として定式化される¹⁾．降伏関数が凸関数であり，かつ荷重領域が多面体である場合には，その多面体の各頂点でのみ降伏条件を考慮すればよいことが容易にわかる¹⁸⁾．これは，シェイクダウン解析における古典的な結果である．

これに対して，本稿では，シェイクダウン解析はロバスト最適化とみなせることを解説した．この視点を導入すると，荷重領域が楕円体である場合にも，区分的線形な降伏や von Mises の降伏関数については，シェイクダウン解析を等価で扱いやすい最適化問題に帰着できることを説明した．

¹⁾このような最適化問題は，半無限計画とよばれる．

謝辞 本稿の一部は，大林財団「都市に関する研究助成」および JSPS 科研費 (C) 26420545 の助成を受けたものである．

参考文献

- 1) M. F. Anjos, J. B. Lasserre (eds.): *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*. Springer, New York (2012).
- 2) A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, A. Nemirovski: *Robust Optimization*. Princeton University Press, Princeton (2009).
- 3) A. Ben-Tal, A. Nemirovski: Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, **23**, 769–805 (1998).
- 4) A. Ben-Tal, A. Nemirovski: *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. SIAM, Philadelphia (2001).
- 5) C. D. Bisbos: Semidefinite optimization models for limit and shakedown analysis problems involving matrix spreads. *Optimization Letters*, **1**, 101–109 (2007).
- 6) C. D. Bisbos, A. T. Ampatzis: Shakedown analysis of spatial frames with parameterized load domain. *Engineering Structures*, **30**, 3119–3128 (2008).
- 7) C. D. Bisbos, A. Makrodimopoulos, P. M. Pardalos: Second-order cone programming approaches to static shakedown analysis in steel plasticity. *Optimization Methods and Software*, **20**, 25–52 (2005).
- 8) C. D. Bisbos, P. M. Pardalos: Second-order cone and semidefinite representations of material failure criteria. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **134**, 275–301 (2007).
- 9) E. Cherkaev, A. Cherkaev: Principal compliance and robust optimal design. *Journal of Elasticity*, **72**, 71–98, 2003.
- 10) G. de Saxcé, A. Oueslati, E. Charkaluk, J.-B. Tritsch (eds.): *Limit State of Materials and Structures: Direct Methods 2*. Springer, Dordrecht (2013).
- 11) L. El Ghaoui, F. Oustry, H. Lebret: Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM Journal on Optimization*, **9**, 33–52 (1998).
- 12) 寒野 善博：2 次錐計画の構造力学への応用．オペレーションズ・リサーチ, **59**, 725–731 (2014).
- 13) Y. Kanno: A note on formulations of robust compliance optimization under uncertain loads. 日本建築学会構造系論文集, **80**, 601–607 (2015).
- 14) Y. Kanno, I. Takewaki: Robustness analysis of trusses with separable load and structural uncertainties. *International Journal of Solids and Structures*, **43**, 2646–2669 (2006).
- 15) W. T. Koiter: A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, B (Proceedings of the Section of Sciences. Series B, Physical Sciences)*, **59**, 24–34 (1956).

- 16) W. T. Koiter: General theorems for elastic plastic structures. In: J. N. Sneddon, R. Hill (eds.), *Progress in Solid Mechanics*, North Holland, Amsterdam, pp. 167–221 (1960).
- 17) J. A. König, G. Maier: Shakedown analysis of elastoplastic structures: A review of recent developments. *Nuclear Engineering and Design*, **66**, 81–95 (1981).
- 18) G. Maier: Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws: A finite element, linear programming approach. *Meccanica*, **4**, 250–260 (1969).
- 19) A. Makrodimopoulos: Computational formulation of shakedown analysis as a conic quadratic optimization problem. *Mechanics Research Communications*, **33**, 72–83 (2006).
- 20) E. Melan: Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal-plastischem Baustoff. *Sitzungsberichte, Akademie der Wissenschaften in Wien, Abt. II/a*, **145**, 195–218 (1936).
- 21) I. Pólik, T. Terlaky: A survey of S-lemma. *SIAM Review*, **49**, 371–418 (2007).
- 22) 武田 朗子: ロバスト最適化から見た機械学習. オペレーションズ・リサーチ, **59**, 254–259 (2014).
- 23) A. Takezawa, S. Nii, M. Kitamura, N. Kogiso: Topology optimization for worst load conditions based on the eigenvalue analysis of an aggregated linear system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **200**, 2268–2281 (2011).
- 24) D. Weichert, A. Ponter (eds.): *Limit State of Materials and Structures: Direct Methods*. Springer (2009).
- 25) H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe (eds.): *Handbook on Semidefinite Programming: Theory, Algorithms and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston (2000).
- 26) T. Yamaguchi, Y. Kanno: Ellipsoidal load-domain shakedown analysis with von Mises yield criterion: A robust optimization approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **107**, 1136–1144 (2016).
- 27) K. Yonekura, Y. Kanno: Second-order cone programming with warm start for elastoplastic analysis with von Mises yield criterion. *Optimization and Engineering*, **13**, 181–218 (2012).