デジタル・モデュロール

○渡辺　俊 [*1]

キーワード：ル・コルビュジェ、黄金比、羽目板遊び、深さ優先探索、組合せ爆発

1. はじめに

2016 年 7 月 17 日、紆余曲折を経て「ル･コルビュジェの建築作品–近代建築運動への顕著な貢献–」の世界遺産への登録が決定した。その構成遺産には、我が国唯一のコルビュジェ作品である東京上野の国立西洋美術館も含まれている。世界遺産委員会は、国立西洋美術館の評価の一因として、日本における近代建築運動に大きく貢献したことをあげている。実際、同施設は、コルビュジェから送られてきたスケッチ・図面を用いて、戦後の日本建築界をリードした弟子達（前川國男・坂倉準三・吉阪隆生）が“モデュロール”[1-2] に基づき実施設計・現場管理をしたことでも知られている。

国立西洋美術館に限らず、コルビュジェの建築を語るうえで“モデュロール”は氏の設計思想の根幹をなすものであり、これまでにも多くの論説や研究がなされてきた [3-5]。しかし、モデュロール自体の幾何的・数理的側面はコルビュジェ自身により総括されているために、その多くはモデュロールの“数値”は所与とした作品分析や芸術論・作家論、あるいはモデュロールに触発された尺度論が中心である。

一方、モデュロールは原理的には黄金分割を基盤においた無理数による加法について閉じた体系を目指したものである。しかし、アナログな当時としては実用上の観点から端数を適宜切り捨て･切り上げたり､黄金比のルールから外れた混用が認められるなど、最終的に提示された数値は厳格な意味で加法に閉じた体系とはなっていない。また、モデュロールがデザインの自由度を制約しない無限の組み合わせを生み出すシステムであることを示すために、コルビュジェは著書「モデュロール I」において、複数の「羽目板遊び」を提示している。しかし、具体的には、思いつきで描かれた組み合わせ（解）がいくつか示されたのみであり、その無限性が厳密に探求されたわけではない。

2. 研究目的

そこで本論では、モデュロールの身体的・芸術的・実用的観点はとりあえず横に置き、コルビュジェ自身が提示した羽目板遊びがどれほどの“組合せ爆発”を起こすのかについて、プログラミングによる実証的な解法を提示することを通じて、改めてデジタル時代のモデュロールを探求することを目的とする。

3. モデュロールの復習

モデュロールは、赤組と青組という二つの数列で構成されている。

赤組 R : ..., 165, 267, 432, 698, 1130, 1829, ...

青組 B : ..., 330, 534, 863, 1397, 2260, 3658, ...

これらの値は、6 フィートの人間の身長を基準にヘソの高さと上にあげた手の指先の高さをメートル法に換算した単位（R_{unit} = 1130 ㎜, B_{unit} = 2 × R_{unit} = 2260 ㎜）に「基本の数（= 黄金比 ϕ）」を累積的に乗じて導き出したものである。ここで黄金比 ϕ とは、

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

であり、

$$\phi + \phi^2 = \phi^3$$

$$\frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi} = 1$$

$$\frac{1}{\phi^3} + \frac{2}{\phi^2} = 1$$

$$\frac{1}{\phi^2} + \phi = 2$$

という特徴がある。すなわち、モデュロールの数列も、原理的にはフィボナッチ数列のように隣り会う二項の和が次の項の値になるとともに、二つの数列の間にも一定の関係が成り立つことが分かる。

$$R_{n-2} + R_{n-1} = R_n$$

$$B_{n-2} + B_{n-1} = B_n$$

$$R_{n-3} + B_{n-2} = R_n$$

$$R_{n-2} + R_{n+1} = B_n$$

$$R_n + R_n = B_n$$

しかし、赤組、青組の数値を詳細に見ると、

330 + 534 ≠ 863

と整数化したための誤差が生じており、これらの数値をそのままコンピュータで利用することは致命的である。コルビュジェ自身「これらの数値は通常使用されている数字に近づける要求に応えた」もので「端数をなくすことは考えなかった」とも述べている。コンピュータであ

れば高い精度で無理数を扱うことが可能であり、モデュロール本来の姿を扱うことが可能であろう。

4．再帰二分法による生成

コルビュジェが最初に示した「羽目板遊び (1)」は規定の正方形（2260 × 2260）をモデュロールにより次々に分割する遊びである（図１）。その方法は、先の黄金比の特性に従えば、対象となる矩形の横方向 (x) または縦方向 (y) の何れかについて、それが赤組の値であれば、

$$R_n \Longrightarrow \frac{R_n}{\phi} : \frac{R_n}{\phi^2} = R_{n-1} : R_{n-2}$$

$$R_n \Longrightarrow \frac{R_n}{\phi^2} : \frac{R_n}{\phi} = R_{n-2} : R_{n-1}$$

$$R_n \Longrightarrow \frac{R_n}{\phi^3} : \frac{2R_n}{\phi^2} = R_{n-3} : B_{n-2}$$

$$R_n \Longrightarrow \frac{2R_n}{\phi^2} : \frac{R_n}{\phi^3} = B_{n-2} : R_{n-3}$$

$$R_n \Longrightarrow R_n = (stable)$$

の５つの分割ルールから任意の一つを、それが青組の値であれば、

$$B_n \Longrightarrow \frac{B_n}{\phi} : \frac{B_n}{\phi^2} = B_{n-1} : B_{n-2}$$

$$B_n \Longrightarrow \frac{B_n}{\phi^2} : \frac{B_n}{\phi} = B_{n-2} : B_{n-1}$$

$$B_n \Longrightarrow \frac{B_n\,\phi}{2} : \frac{B_n}{2\,\phi^2} = R_{n+1} : R_{n-2}$$

$$B_n \Longrightarrow \frac{B_n}{2\,\phi^2} : \frac{B_n\,\phi}{2} = R_{n-2} : R_{n+1}$$

$$B_n \Longrightarrow \frac{B_n}{2} : \frac{B_n}{2} = R_n : R_n$$

$$B_n \Longrightarrow B_n = (stable)$$

の６つの分割ルールから任意の一つを適応することと翻訳できる。上記のルールで分割する限り、分割後のそれぞれの矩形も必ずモデュロールに従うので、ルールは再帰的に適応することが可能である。すなわち、再帰の深度（回数）を制限しない限り、その組合せに限りはない。逆に、上記のルールに従わなければ、加法について閉じた体系が崩れる可能性がある。

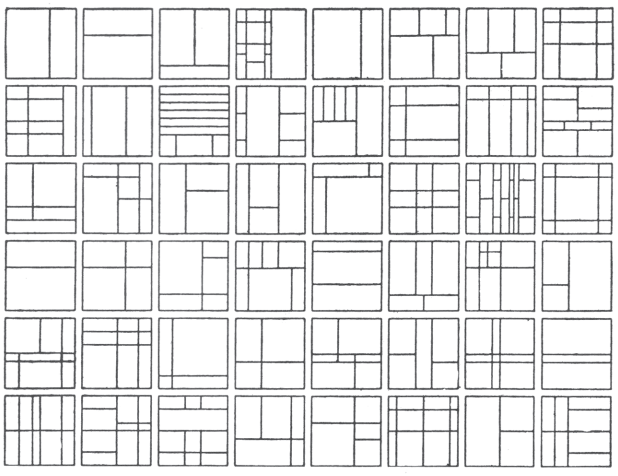

図1「羽目板遊び (1)」（モデュロールⅠ 第39図より）

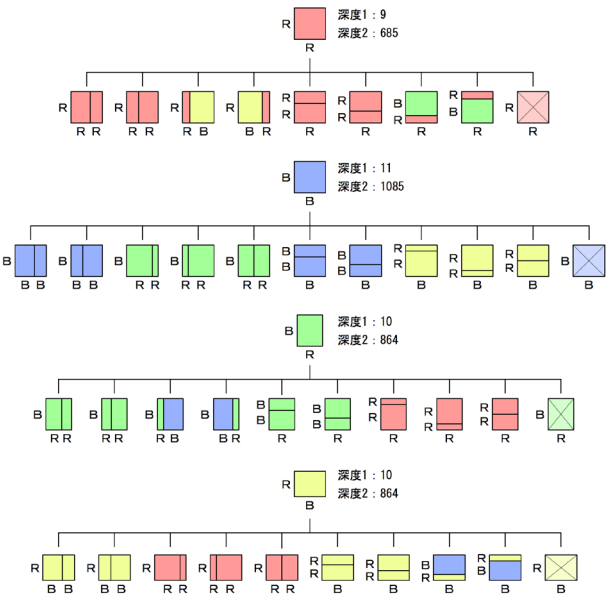

図２「羽目板遊び (1)」の分割ルール

ルールを図式として整理すると図２の様になる。一回のルール適用で生成できる組合せは、縦横ともに赤組の矩形では９通り、縦横ともに青組の矩形では 11 通り、縦が青組・横が赤組の矩形では 10 通り、縦が赤組・横が青組の矩形では 10 通りである。それぞれの矩形から複数回のルール適用で生成できる組合せの概数（重複あり）は、上記の場合の数を再帰的に積算すればよい[注 1)]。

規定の正方形は縦横ともに青組の矩形なので、それぞれの深度で生成できる組合せの概数は、

深度１： 11 通り
深度２： 1, 085 通り
深度３： 9, 187, 877 通り
深度４： 596, 542, 641, 458, 117 通り

と、爆発的に大きくなることが分かる。深度４でも、羽目板の数は最大 16 枚までであり、手作業で全ての組合せを描き出すことは不可能であろう。

一方、コンピュータを用いれば、上記の手続きは kd-tree の様な比較的簡単な再帰的アルゴリズムで記述できる。恣意的なパターンだけでなく様々な組み合わせを生成するように、ルールの適用に乱数を用いたプログラムで生成した組合せの例を図３に示す。なお、モデュロールの数値は常に黄金比 ϕ を用いて算出しており、その精度は 10^{-15} である。色のグラデーションは分割した深度を示している[注 2)]。

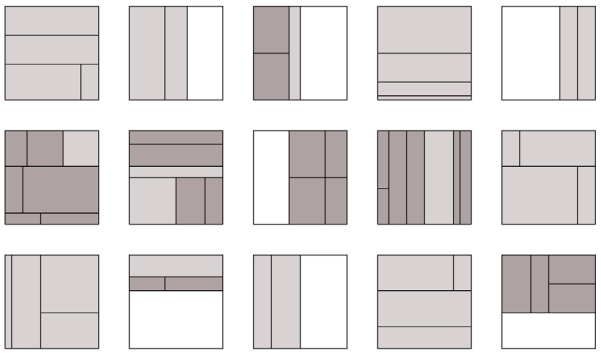

図３　再帰二分法による生成

書籍には「羽目板遊び (1)」の事例として 48 通りの組合せが掲載されているが、細かく観察すると先のルールから外れた分割の組合せが確認できる（図１）。例えば、上段５番目の組合せでは左右の比が、

$$B_n \implies B_n - \frac{R_n}{\phi} : \frac{R_n}{\phi} \approx 1562 : 698$$

となっており、左側の数値は赤組にも青組にも存在していない。コルビュジェ自身､当然この点を承知しており、実はこの数値も、

$$B_n - \frac{R_n}{\phi} : \frac{R_n}{\phi} = R_n + \frac{R_n}{\phi^2} : \frac{R_n}{\phi} \implies R_n + R_{n-2} : R_{n-1}$$

へと還元できる。ルールを拡張すれば、これらも許容した生成が可能であるが、さらに組合せの概数は増えるであろう。

５．深さ優先探索による列挙

コルビュジェは、規定の正方形（2260 × 2260）の中をモジュロールに従う異なったサイズの羽目板に“分ける”もう一つの「羽目板遊び (2)」を紹介している。具体的には、a）６つの異なった羽目板 12 枚[注3)]、b）４つの異なった羽目板６枚、c）３つの異なった羽目板９枚、の３種類について、それぞれ 16 通りの組合わせを示している（図４）。“分ける”という訳語通り、そこに示された事例はいずれも４節の再帰的二分割のアルゴリズムで生成できる組合せばかりであるが、「羽目板遊び (2)」の趣旨に従えば、この方法では与えられたサイズの羽目板による組合せの全てを導くことはできない。羽目板の配置によっては、四畳半畳敷きの様に、規定の正方形を横断（二分割）しない組合せも存在する可能性があるからである。

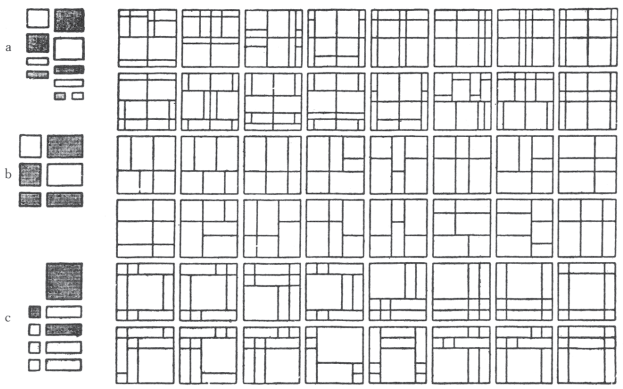

図4　「羽目板遊び (2)」（モデュロールⅠ 第40図より）

同類の遊びにペントミノに代表される箱詰めパズルがある。箱詰めパズルでは簡便に解を数え上げる一般的な方法は知られておらず、総数を知るには全ての配置を虱潰しに試す以外に方法はない。これを手作業で試すのは不可能であり、数え上げにはコンピュータを用いた解の探索が行なわれている。そのアルゴリズムは深さ優先探索（depth-first search）と呼ばれるもので、「羽目板遊び (2)」に当てはめると具体的には以下のような手続きなるであろう[注4)]。

1. 規定の正方形の左下角（原点）に最初の羽目板を配置する。
2. 残りの羽目板から一つ選び、下記の条件を満たす様に配置する。
   a. 規定の正方形の中に収まる。
   b. 既に配置されている羽目板と重複させない。
   c. 左下角を既に配置された羽目板の外周の何れかの角に揃える。
   d. 配置された羽目板全体が一体になる。
4. 残りの羽目板がなくなるまで、２を繰り返す。
5. 規定の正方形に収まらなければ、向きを換えて試す。
6. それでも収まらなければ、一つ前の段階に戻る。

例えば図５の様に羽目板３枚（p_1, r_1, t_1）が配置された状況では、条件を満たす４枚目（r_2）の配置は①～④あるいは向きを換えた⑤～⑦となる。

原理的には上記の手続きで全ての解を列挙できるはずである。しかし、このような探索木は要素の数が増えるとともに“組合せ爆発”を起こすことが知られている。実際、人間は網羅的でなければ簡単に幾つもの解を見つけることができるが、上記の手続きだけを素直に記述し

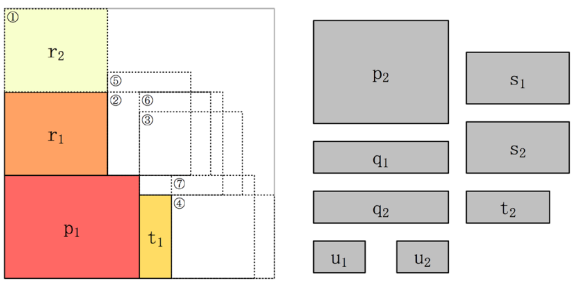

図５　深さ優先探索のアルゴリズム

たプログラムは、羽目板が 12 枚になると、最初に与える並びによっては 12 時間かけても解を一つも見つけられなかった[注2)]。無駄な計算を行わないための効率的な探索木の枝狩りが必要である。

そもそも、最初に配置する羽目板については、向きを換えた探索は x 軸と y 軸を反転させた組合せになるだけなので、改めて探索する必要はない。正方形の羽目板については、あらゆる状況で向きを換えて試す必要がないのも自明であろう。同じサイズの羽目板が複数存在する場合、例えば図５で t_1 を t_2 で置き換えた状況も改めて探索する必要はない。また、図５が p_1, r_1, t_1 の順で配置した状況とすると、後に p_1, t_1, r_1 の順で配置して同じ外形に至れば、それより先の探索木は同じになるであろう。

途中段階での羽目板の配置を詳細に検討すれば、⑦のように規定の正方形との隙間が羽目板の最小寸法より小さい場合、探索を進めても解が見つからないことは自明であろう。また、②、③、⑤、⑥、⑦に配置した場合、羽目板全体としては部分的に凹な形状ができることになるが、中でも②のように凹部分の幅が羽目板の最小寸法より小さい場合も同様である。

さらに、同じサイズの羽目板が複数存在するので、解として同じ組合せに至る可能性があり、重複を避けるための工夫も必要である。基本的には、新たな組合せが見つかるたびに、既に見つかった組合せ全てと比較する必要があり、高速な探索アルゴリズムを導入したが、紙面の関係でここでは詳細を割愛する。

以上、諸々が改良されたプログラムにより探索された組合せの中から適当に抜粋して図３に示す。４節のプログラムと同様に、モデュロールの数値は常に黄金比 ϕ を用いて算出しており、その精度は 10^{-15} である。赤から紫への色のグラデーションは羽目板を配置した順番を示している。それぞれの解の総数は、b の組合せでは 232 通り（計算時間 32.4 秒）、c の組合せでは 315 通り（計算時間 425.9 秒）であった[注2)]。一方、a の組合せについては、既に計算に約１ヶ月を費やし 40 万通り以上の組合せが見つかっているが、まだ計算の途中である。全てを探索するには概ね３～４ヶ月かかると推定され、シンポジウムの際に結果を報告したい。

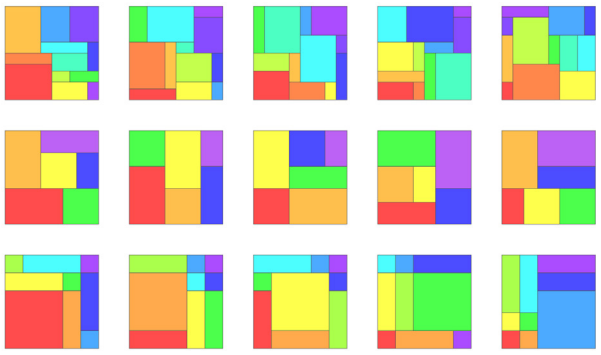

図６　プログラムにより探索された組合せ

６．おわりに

モデュロールは、区切れが悪い数値を扱う煩雑さから結果的には普及しなかった。デジタル時代となり、我々はそのような制約から開放されつつある。況や、でたらめな寸法の形態でも、コンピュータの圧倒的な力を借りれば簡単に実現できてしまう。

モデュロールⅠ・Ⅱを翻訳した吉阪隆正は、デザインの本質について「考えて見ると建築の設計それ自体が、順列組合せのように思えてくる。... 私たちはその中で、時間の許す限り、力の許す限りのものを抜き打ちにやって見て選ぶ外ない。」と述べている[6)]。デザインという秩序だった無限の探究にこそ、コンピュータの圧倒的な力が役立つと言えよう。

本研究は、科学研究費補助金　基盤研究（B）「デザイン思考における記号操作の意味的構造と実践的役割に注目するデザイン知の探究」の支援を得て行われた。

注 1)「モデュロールⅠ」での事例に従い、回転、鏡像が一致するとしても、異なる組合せとして数える。

注 2) 計算には MacPro（プロセッサ　3.7GHz Quad-Core Intel Xeon E5・メモリ　64GB）を用い、プロルラムは Python 3.5 で記述し、幾何演算のパッケージとして Shapely 1.6 を利用した。なお、最終的なプログラムは Cython に変換しても実行速度に大きな違いは出なかった。

注 3) 原書では「5 つの異なった羽目板」となっているが誤植であり、図をみれば 6 つであることが確認できる。

注 4) 対象をグラフ構造に落とし込めれば、BDD/ZDD を利用して高速に解を列挙する研究も行なわれている[7)]。

[参考文献]

1) ル・コルビュジェ、吉阪隆正訳：モデュロールⅠ、美術出版社、1953
2) ル・コルビュジェ、吉阪隆正訳：モデュロールⅡ、美術出版社、1959
3) 池辺陽：建築工業生産化のためのモデュール（標準数）の確立について、生産研究 第 10 巻 第 12 号、pp. 377-382、1958 年
4) 内田祥哉：建築生産のオープンシステム、彰国社、1977 年 8 月
5) 加藤道夫：モデュロール＝モデュールと黄金比の統一、ル・コルビュジエ 建築とアート，その創造の軌跡、pp. 275-280、丸善、2007 年 7 月
6) 佐藤鉄夫、吉阪隆正：コンビネーションとパーミュテーション、建築文化 136、p70、1960 年 6 月
7) Takizawa A., Miyata Y. and Katoh N.：Enumeration of Floor Plans Based on Zero-Suppressed Binary Decision Diagram, Proceedings of CAADRIA 2014, pp.275-284, 2014/6

*1 筑波大学システム情報系・教授・博士（工学）