# 剛に接合されたトラス梁弦材の弾塑性座屈解析法

○沖　佑典*1　　元結　正次郎*2

キーワード：弦材　中間軸方向力　横座屈　座屈後挙動　塑性散逸　塑性ヒンジ法

## 1．　はじめに

電子計算機の発達により、材料的幾何学的非線形性を考慮した数値解析的検討を盛り込んだ構造設計が可能になりつつあるが、設計者は解析精度および演算時間などの目的に応じて、適切に解析モデルの節点数や要素の種類を選択することが求められる。特にトラス梁架構など多数の部材を有する空間構造の場合 [1)]、必然的に解析モデルの自由度数は膨大となるため、構成要素数はなるべく少ないほうが望ましい。

構成部材の繰り返される部分を連続体に置換する研究は、要素数を減らす一知見として古くからなされているが [2)]、多くは弾性設計時に有用となる空間構造の最大耐力を同定するための解析法に留まっている。しかしながら、空間構造の真の安全性を保証するには、要素数を減らしても、最大耐力のみならず耐力後の挙動を再現精度までは落とさずに追跡できる手法とすべきである。空間構造において架構の耐力後の挙動を考慮するためには、全体的な崩壊挙動の起点となる恐れのある個材の座屈を考慮する必要がある。そこで、これまで主要な局所的不安定現象であるトラス梁の構面外座屈後挙動を考慮した「トラス梁要素」の研究がなされてきた [3),4)]。これらは熱力学に基づく最低限の仮説および仮定のみを使用し、単一要素で精度良くトラス梁部材の座屈後挙動を追跡する手法となっている。しかしながら、これらは定式化の際に弦材の端部がピンと仮定されているが、これにより他の部材と接合された場合にみられる複合的な座屈挙動を追跡できないのが現状である。

そこで本研究では Fig.1 に示すトラス梁における上および下弦材を取り出し、材端回転拘束を受けながら横変形する場合の解析法を提案する。なお、Fig.1(b)に示すように、ワーレン型トラス梁には斜材との接合パターンによって 2 種類の弦材軸力分布があるが、中間軸方向力の数($n_\pm$)を変化させることによって両者に対応できる。第 2 章では弾性構成則、釣り合い関係、塑性散逸項および塑性流れ則を導出する。さらに、第 3 章では数値計算の際の接線剛性を示し、定式化 I[5)] と同様の方法で、弾塑性変形および座屈の進展を逐次計算する手順を示す。第 4 章では第 2 章、第 3 章に則った解析法(提案手法)と離散化手法による解析結果の比較により、弾塑性座屈の発生とそれにより他部材の変形や応力の進展に影響が生じるような例題を通して、提案手法の妥当性を検証する。

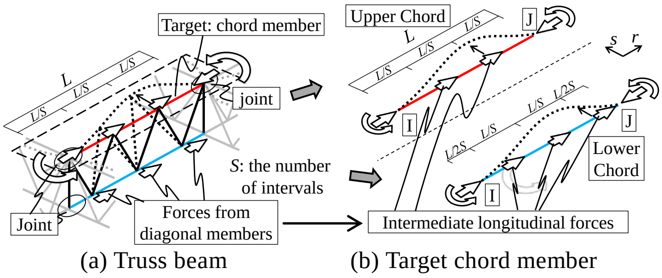



Fig.1　Out-of-plane buckling of a chord member

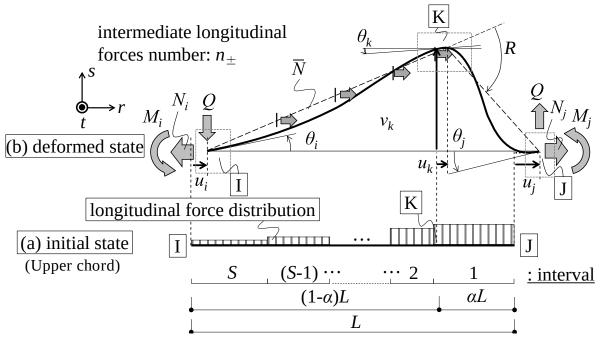



Fig.2　Target model

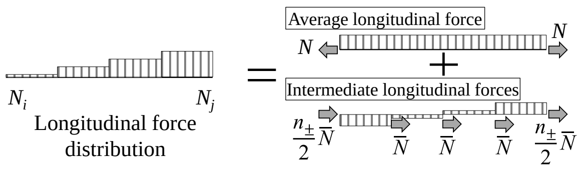



Fig.3　Definition for longitudinal forces

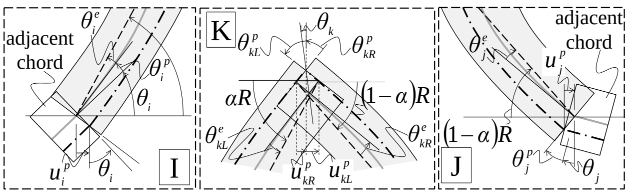



Fig.4　Notation of deformations and rotations

## 2．　弦材に対する基本式の定式化

本章では、材端の接合条件を考慮した力学モデルを設定し、熱力学に基づく方法から基本式を示す。

### 2.1　対象とする弦材

変形前後の弦材を Fig.2 に示す。長さ $L$ の部材 IJ が材端の点 I、J で回転拘束を受けると、直線部材が弾塑性座屈するとき、塑性ヒンジが点 I、J に加え、点 J から $\alpha L$ の点 K で生じた場合に崩壊機構を形成する。この部材に、トラス梁の斜材から受ける、$n_\pm$ 個の等間隔で同じ方向の軸方向力(中間軸方向力、一つあたり $\overline{N}$ )が生じると、弦

材の任意の点における軸力は、平均軸力 $N$ と中間軸方向力 $\overline{N}$ により表現される(Fig.3)。ここに、$n_\pm$ の複号は上弦材が $n_+ = S-1$、下弦材が $n_- = S$ である。材端力としてはさらに点 I、J に曲げモーメント $M_j$ および $M_j$ が生じ、変形後に Fig.2(b)に示す平衡状態に達した場合を考える。弦材が $\overline{N}$ によって区切られた区間の中で、点 J と次の $\overline{N}$ 作用位置の間に点 K が位置するときの条件は、

$$\text{上弦材：}\ 0<\alpha<\frac{1}{S},\quad \text{下弦材：}\ 0<\alpha<\frac{1}{2S} \tag{1a,b}$$

である。Fig.4 に本研究における塑性変形および回転の定義を示す。定式化の際の $u_i, u_k, u_j$ および $\theta_i, \theta_k, \theta_j$ は対象モデルの点 I、K、J の $r$ 方向変位および $t$ 軸まわりの回転角を、$u_i^p, u_{kL}^p, u_{kR}^p, u_j^p$ は点 I、点 K の左側、点 K の右側、点 J に関する変位の塑性変形成分を、$\theta_i^p, \theta_{kL}^p, \theta_{kR}^p, \theta_j^p$ は各々の回転に関する塑性変形成分を、それぞれ表す。また、座屈による点 K の $s$ 方向変位 $v_k$ に比べて IJ の軸方向変位量は非常に小さいとし、部材 IK、KJ の部材角をそれぞれ $\alpha R, -(1-\alpha)R$ とする。$R$ は弦材のうち部材 IK に対する KJ の相対部材角である。作用する力および変位は右向き、曲げモーメントおよび回転変位は反時計回りを正とする。部材各点の軸力 $N_i, N_j, N_k$ は次式のように示される。

$$N_i = N + \frac{n_\pm}{2}\overline{N},\ N_k = N_j = N - \frac{n_\pm}{2}\overline{N} \tag{2a,b}$$

また、せん断力は次式となる。

$$Q = \frac{\overline{N}}{2} n_\pm \alpha R - \frac{M_i + M_j}{L} \tag{3}$$

## 2.2　弦材における基本式

既報 [6)] に示したように、熱力学に基づく仮説を用いて、弦材の基本式を導出する。具体的な定式化の過程は割愛するが、点 K を境に分割された部材 IK、KJ の各々に対して Helmholtz 自由エネルギーおよび Clausius-Duhem 不等式を立て、得られた各変位成分の全てに恒等条件が成立するとして係数を整理することで、結果として以下の諸式が得られる。

$$N = k_N\left[u - \left(u_L^p + u_R^p\right) + CR^2\right] \tag{4a}$$

$$\overline{N} = k_{\overline{N}}\left[\overline{u} - \left\{\alpha u_L^p - (1-\alpha)u_R^p\right\} + (2\alpha-1)CR^2\right] \tag{4b}$$

$$\boldsymbol{M} = \left\{M_i \quad M_k \quad M_j\right\}^T = \boldsymbol{k}_M \boldsymbol{\theta}^e \tag{4c}$$

$$\Xi = -\left(2N + D\overline{N}\right)CR + \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{a} = 0 \tag{4d}$$

$$\Gamma = N\left(\dot{u}_L^p + \dot{u}_R^p\right) + n_\pm \overline{N}\left(\dot{u}_L^p - \dot{u}_R^p\right) + \boldsymbol{M}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}^p \ge 0 \tag{4e}$$

ここに、

$u = u_j - u_i$, $\overline{u} = u_k - \left\{\alpha u_i + (1-\alpha)u_j\right\}$, $u_L^p = u_i^p + u_{kL}^p$, $u_R^p = u_{kR}^p + u_j^p$,

$\boldsymbol{\theta}^e = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^p - \boldsymbol{a}R$, $\boldsymbol{\theta}^T = \left\{\theta_i \quad 0 \quad \theta_j\right\}$, $\boldsymbol{\theta}^{pT} = \left\{\theta_i^p \quad \left(\theta_{kL}^p - \theta_{kR}^p\right) \quad \theta_j^p\right\}$,

$$\boldsymbol{a} = \begin{Bmatrix}\alpha \\ 1 \\ -(1-\alpha)\end{Bmatrix},\ \boldsymbol{k}_M = \frac{EI_c}{L}\begin{bmatrix}(4-\alpha)/(1-\alpha) & 2 & -1 \\ & 4 & -2 \\ sym. & & \left\{4-(1-\alpha)\right\}/\alpha\end{bmatrix},$$

$$k_N = \frac{Ea_c}{L},\ k_{\overline{N}} = \frac{2Ea_c}{n_\pm \alpha L},\ C = \frac{\alpha(1-\alpha)L}{2},\ D = \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}n_\pm$$

であり、$u$ は弦材の全軸伸縮量を、$\overline{u}$ は点 K における変位から全体の軸伸縮量による移動分を除いた局所変形を、$\boldsymbol{\theta}^e$ は部材の弾性回転角により構成されるベクトルを、それぞれ示す。また、$E$ はヤング係数を、$a_c$ および $I_c$ は部材断面積および断面 2 次モーメントを示し、$k_N$ および $k_{\overline{N}}$ は軸力および中間軸方向力に対する剛性、$\boldsymbol{k}_M$ は材端および点 K の曲げモーメントを算出する弾性構成則に関する剛性マトリクスである。式(4)が弦材に対する基本式であり、式(4a-c)は要素の軸力、中間軸方向力および曲げに関する弾性構成則を、式(4d)は点 K におけるモーメントの釣り合い関係を、式(4e)は塑性散逸項をそれぞれ示す。定式化の過程においては内部の節点方程式を考えることにより、点 K における内部の回転角 $\theta_k$ は縮約される。

## 2.3　塑性流れ則

基本式を用いて各点 I、K、J 降伏後の挙動を追跡するために、対象とする回転軸に対称な断面に対する各変位成分の塑性流れ則を求める。各点における降伏条件式は、$N, \overline{N}$ および各点の $M_\eta$ の関数として次のように示される。

$$\Phi_\eta^\pm = \Phi_\eta^\pm\left(N, \overline{N}, M_\eta\right) \quad (\eta = i, j, k) \tag{5}$$

ここに、式(5)の複号は対称断面に対する降伏関数の不連続性を示すものである。本論文においては、弦材の 3 つの点それぞれで $\Phi_\eta^\pm = 0$ となった時、その降伏条件は active となった、と定義する。式(5)=0 で表される応力曲面(M-N 曲線)が常に外側に対して凸であり、更に断面形状が当該部材の回転軸に対して対称、かつ $\Phi_\eta^\pm$ が $N, \overline{N}$ および $M_\eta$ に関して微分可能であることを仮定する。最大塑性散逸の原理を導入し、塑性散逸項および active となった点の降伏条件式により、以下の Lagrangian を考える。

$$L = -\Gamma + \sum_\eta \dot{\lambda}_\eta^p \Phi_\eta^\pm \quad \left\{\eta = i, j, k \middle| \eta \in active\right\} \tag{6}$$

ここに、$\dot{\lambda}_i^p, \dot{\lambda}_k^p, \dot{\lambda}_j^p$ は Lagrange 乗数であり、塑性進展パラメータと呼ばれる。これらと式(5)は各ヒンジ点において次式の Kuhn-Tucker 条件を常に満たす必要がある。

$$\dot{\lambda}_\eta^p \ge 0,\ \Phi_\eta^\pm \le 0,\ \Phi_\eta^\pm \cdot \dot{\lambda}_\eta^p = 0 \tag{7a-c}$$

また、負荷状態($\Phi_\eta^\pm = 0$)に対してはその変化率に関しても以下の関係が成立する。

$$\dot{\Phi}_\eta^\pm = 0 \tag{8}$$

式(6)を材端力の独立な成分である $N, \overline{N}, M_i, M_k, M_j$ で偏微分して整理すると以下の塑性流れ則を得る。

$$\dot{u}_L^p, \dot{u}_R^p = \frac{1}{2}\sum_\eta \left(\frac{\partial \Phi_\eta^\pm}{\partial N} \pm \frac{2}{n_\pm}\frac{\partial \Phi_\eta^\pm}{\partial \overline{N}}\right)\dot{\lambda}_\eta^p \quad \text{(括弧内第2式の複号は} +\text{が}\dot{u}_L^p, -\text{が}\dot{u}_R^p\text{)},$$

$$\dot{\theta}_i^p = \dot{\lambda}_i^p \frac{\partial \Phi_i^\pm}{\partial M_i},\ \dot{\theta}_k^p = \dot{\theta}_{kL}^p - \dot{\theta}_{kR}^p = \dot{\lambda}_k^p \frac{\partial \Phi_k^\pm}{\partial M_k},\ \dot{\theta}_j^p = \dot{\lambda}_j^p \frac{\partial \Phi_j^\pm}{\partial M_j} \tag{9a-d}$$

これらは、塑性散逸項が熱力学の第 2 法則を満たすものであり、文献 6 までで使用してきた矩形断面を含む一般的な定式化となっている。

## ３． 数値計算手順

本章では、第 2 章で示した基本式および塑性流れ則を用いて数値計算を実行する際の、弾性時および弾塑性時における接線剛性と、数値計算手順を示す。

### 3.1 弾塑性接線剛性

全ての降伏条件は材端変位成分 $\boldsymbol{u}$ 、塑性進展に関する変数 $\boldsymbol{\lambda}$ および座屈の進展を表す変数 $R$ のみにより表現されると仮定し、式(7)を満足する降伏関数に関して式(8)が成り立つことから、次式が成立する。

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}} + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{b}_1\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{0} \qquad (10a)$$

$$\therefore \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{b}_1\dot{\boldsymbol{u}} \qquad (10b)$$

一方、軸力および材端曲げモーメントの変化率は式(11a)となるため、式(10b)を代入することにより式(11b)を得る。

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{K}^e\dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{b}_2^T\dot{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (11a)$$

$$= \left(\boldsymbol{K}^e + \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{b}_1\right)\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{K}^{ep}\dot{\boldsymbol{u}} \qquad (11b)$$

以上に示した $\boldsymbol{K}^{ep}$ が弾塑性接線係数である。ここに、

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}^T = \left\{\dot{\Phi}_i^+ \quad \dot{\Phi}_i^- \quad \dot{\Phi}_k^+ \quad \dot{\Phi}_k^- \quad \dot{\Phi}_j^+ \quad \dot{\Phi}_j^- \quad \dot{\Xi}\right\},$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T = \left\{\dot{\lambda}_i^{p+} \quad \dot{\lambda}_i^{p-} \quad \dot{\lambda}_k^{p+} \quad \dot{\lambda}_k^{p-} \quad \dot{\lambda}_j^{p+} \quad \dot{\lambda}_j^{p-} \quad \dot{R}\right\},$$

$$\boldsymbol{K}^e = \begin{bmatrix} k_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\bar{N}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{Mii} & k_{Mij} \\ 0 & 0 & k_{Mji} & k_{Mjj} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &\boldsymbol{b}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{u}}, \boldsymbol{b}_2^T = -\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \\ &\dot{\boldsymbol{f}}^T = \left\{\dot{N} \quad \dot{\bar{N}} \quad \dot{M}_i \quad \dot{M}_j\right\}, \\ &\dot{\boldsymbol{u}}^T = \left\{\dot{u} \quad \dot{\bar{u}} \quad \dot{\theta}_i \quad \dot{\theta}_j\right\} \end{aligned} \qquad (12a\text{-}g)$$

であり、 $\dot{\boldsymbol{f}}, \dot{\boldsymbol{u}}$ は材端力および変位の各変化率、 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}$ は降伏関数およびモーメントの釣合い関数からなるベクトル、 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ は塑性化および座屈の進展を表す変数ベクトル、 $\boldsymbol{b}_1$ は変位ベクトルに関する微係数、 $\boldsymbol{b}_2$ は材端力の $\boldsymbol{\lambda}$ に関する微係数、 $\boldsymbol{K}^e$ は弾性剛性マトリクスである。さらに、$\boldsymbol{G}$ は塑性化および座屈の進展を得る際の係数マトリクスであり、式(5)および式(4d)の、 $\boldsymbol{\lambda}$ の変数による各偏微分より得られる。ただし、各ベクトル $\dot{\boldsymbol{\Phi}}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}$ および係数マトリクス $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{\Phi}$ の各成分に対して降伏判定を行い、active となった成分のみにより構成される。例えば、弦材が Fig.(5)に示す応力状態のとき、 $\Phi_i^+, \Phi_i^-, \Phi_k^-, \Phi_j^- < 0$ かつ $\Phi_k^+ = \Phi_j^+ = 0$ となる。このとき、接線剛性は、active となっている降伏関数 $\Phi_k^+, \Phi_j^+$ および釣合い関係 $\Xi$ の計 3 つに対応する成分(第 3 行/列、第 5 行/列および第 7 行/列)のみによる $\dot{\boldsymbol{\lambda}}, \dot{\boldsymbol{\Phi}}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ を用いて計算する。仮に全条件式が active となる場合に $\boldsymbol{G}$ は最大 7×7 のマトリクスとなるが、このような場合は全部材が軸降伏する特異な条件である。一方、通常の弾塑性座屈あるいは曲げによる塑性化が生じた状態は高々4 つの条件式が active となる。

また、$R$ が非零かつ圧縮力が負荷される場合、降伏条件がいずれも active でない場合であっても、塑性ヒンジ位置におけるモーメントの釣り合い式(4d)は多くの場合 active となる。そこで、ここでは接線剛性の一例として、上記の状態に対する導出過程を示す。 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}$ の成分のうち 1 つが active となるため、$\boldsymbol{G}$ は次式に示すスカラーとなる。

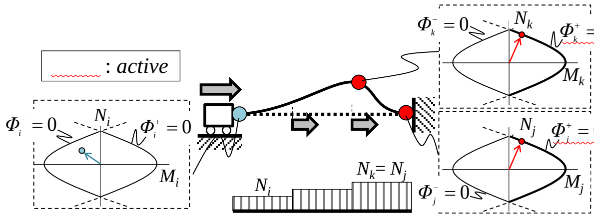



Fig.5 M-N interactions at plastic hinges

$$\boldsymbol{G} = -4\left[k_N + D\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)k_{\bar{N}}\right]C^2R^2 - \left[2N + D\bar{N}\right]C - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{k}_M\boldsymbol{a} \quad (13)$$

また、4×1 のマトリクスとなる $\boldsymbol{b}_1$ および $\boldsymbol{b}_2$ を以下に示す。

$$\boldsymbol{b}_1^T = \left[b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13} \quad b_{14}\right], -\boldsymbol{b}_2^T = \left[b_{21} \quad b_{22} \quad b_{23} \quad b_{24}\right] \qquad (14a,b)$$

以上より、式(11b)の非線形成分は次のとおりである。

$$-\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{G}^{-1}\begin{bmatrix} b_{11}b_{21} & b_{12}b_{21} & b_{13}b_{21} & b_{14}b_{21} \\ b_{11}b_{22} & b_{12}b_{22} & b_{13}b_{22} & b_{14}b_{22} \\ b_{11}b_{23} & b_{12}b_{23} & b_{13}b_{23} & b_{14}b_{23} \\ b_{11}b_{24} & b_{12}b_{24} & b_{13}b_{24} & b_{14}b_{24} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

ここに、

$$b_{11} = b_{21} = 2CRk_N, \ b_{12} = DCRk_{\bar{N}}, \ b_{22} = 2(2\alpha - 1)CRk_{\bar{N}},$$

$$b_{13} = b_{23} = \frac{EI_c}{L}\frac{3}{1-\alpha}, \ b_{14} = b_{24} = -\frac{EI_c}{L}\frac{3}{\alpha} \qquad (16a\text{-}e)$$

である。係数項を示す式(16)のうち(b),(c)から、中間軸方向力が離散的に生じている影響で、 $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ は等しくならず、式(15)は対称マトリクスとはならない。

### 3.2 数値計算手順

ここでは、中空円断面を対象に、Newton 法による数値計算手順を提示する。時刻 $t$ における各変位と塑性変位、時刻 $t+\Delta t$ における全変位成分と中間軸方向力比 $\left(\bar{N}/N\right)$ が既知であるとする。

$${}^{trial}_{(i=1)}\boldsymbol{u} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u}, \ {}^{trial}_{(i=1)}\boldsymbol{u}^p = {}^{t}\boldsymbol{u}^p, \ {}^{trial}_{(i=1)}R = {}^{t}R, \ {}^{trial}_{(i=1)}\dot{\lambda}_\eta^p = {}^{t}\dot{\lambda}_\eta^p \qquad (17a\text{-}d)$$

ここに、左上添字は時刻 $(t, t+\Delta t)$ もしくは収斂計算上の試行値 $(trial)$ であることを、左下添字は収斂回数を示す。

<弾性試行過程>

試行材端力をこの段階で計算する。

$${}^{trial}_{(i)}N = k_N\left[{}^{trial}_{(i)}u - \left({}^{trial}_{(i)}u_L^p + {}^{trial}_{(i)}u_R^p\right) + C\,{}^{trial}_{(i)}R^2\right] \qquad (18a)$$

$${}^{trial}_{(i)}\bar{N} = k_{\bar{N}}\left[{}^{trial}_{(i)}\bar{u} - \left\{\alpha\,{}^{trial}_{(i)}u_L^p - (1-\alpha)\,{}^{trial}_{(i)}u_R^p\right\} + (2\alpha - 1)C\,{}^{trial}_{(i)}R^2\right] \qquad (18b)$$

$${}^{trial}_{(i)}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{k}_M\,{}^{trial}_{(i)}\boldsymbol{\theta}^e \qquad (18c)$$

<降伏および座屈判定>

中空円断面の降伏関数は次に示すとおりである。

$${}^{trial}_{(i)}\Phi_\eta^\pm\left({}^{trial}_{(i)}N, {}^{trial}_{(i)}\bar{N}, {}^{trial}_{(i)}M_\eta\right) = -\cos\left(\xi\,{}^{trial}_{(i)}N_\eta\right) \pm {}^{trial}_{(i)}M_\eta / M_p$$

$$(\text{複号同順、} \ \eta = i, j, k) \qquad (19a)$$

$${}^{trial}_{(i)}\Xi = -\left(2\,{}^{trial}_{(i)}N + D\,{}^{trial}_{(i)}\bar{N}\right)C\,{}^{trial}_{(i)}R + {}^{trial}_{(i)}\boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{a} \qquad (19b)$$

ここに、$\xi = \pi/N_y$、$N_y$ および $M_p$ はそれぞれ、弦材の軸力およびモーメントに関する全塑性耐力を示す。ここで、式(19a)の 2 つの式の交点( $\left(N_\eta, M_\eta\right) = \left(\pm N_y, 0\right)$ )のみは特異点となる。そこで提案手法においては、Multi-surface に

対する Koiter の考え方に従い [7,8]、以下を計算する。式(19a)の降伏条件は 1 要素に対して 6 個あり、これと式(19b)の計 7 個の式に対して以下の判定をおこなう。

$$ {}^{trial}_{(i)}\Phi_{\eta}\left({}^{trial}_{(i)}N, {}^{trial}_{(i)}\overline{N}, {}^{trial}_{(i)}M_{\eta}\right) < tolerance \,, \left|{}^{trial}_{(i)}\Xi\right| < tolerance \quad (20a,b) $$

以上の判定のうち 1 個以上が満たされなかった場合、その判定式を active とし、以下の塑性進展過程に進む。

<塑性進展過程>

提案手法の塑性および座屈の進展に関する変数は、以下の連立方程式を解くことにより得る。

$$ \Delta\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{\lambda} \quad (21) $$

ここに、

$$ \Delta\boldsymbol{\Phi} = \left\{ {}^{trial}_{(i)}\boldsymbol{\Phi}_i^{+} \quad {}^{trial}_{(i)}\boldsymbol{\Phi}_i^{-} \quad {}^{trial}_{(i)}\boldsymbol{\Phi}_k^{+} \quad \boldsymbol{\Phi}_k^{-} \quad {}^{trial}_{(i)}\boldsymbol{\Phi}_j^{+} \quad {}^{trial}_{(i)}\boldsymbol{\Phi}_j^{-} \quad {}^{trial}_{(i)}\Xi \right\}^T , $$

$$ \Delta\boldsymbol{\lambda} = \left\{ \delta\Delta\lambda_i^{p+} \quad \delta\Delta\lambda_i^{p-} \quad \delta\Delta\lambda_k^{p+} \quad \delta\Delta\lambda_k^{p-} \quad \delta\Delta\lambda_j^{p+} \quad \delta\Delta\lambda_j^{p-} \quad \delta\Delta R \right\}^T $$

である。塑性変位増分は以下の式によって更新される。

$$ \delta\Delta u_L^p = \xi\left(\delta\Delta\lambda_i^{p+} + \delta\Delta\lambda_i^{p-}\right)\sin\left(\xi N_i\right), $$

$$ \delta\Delta u_R^p = \xi\left[\left(\delta\Delta\lambda_k^{p+} + \delta\Delta\lambda_k^{p-}\right)\sin\left(\xi N_k\right) + \left(\delta\Delta\lambda_j^{p+} + \delta\Delta\lambda_j^{p-}\right)\sin\left(\xi N_j\right)\right], $$

$$ \delta\Delta\theta_\eta^p = \frac{\delta\Delta\lambda_\eta^{p+} - \delta\Delta\lambda_\eta^{p-}}{M_p} \,, \; {}^{trial}_{(i+1)}\Delta\lambda_\eta^{p\pm} = {}^{trial}_{(i)}\Delta\lambda_\eta^{p\pm} + \delta\Delta\lambda_\eta^{p\pm} \quad \left(\eta = i, j, k\right) $$

(22a-d)

これらをもとに塑性変位成分および部材角を更新する。

$$ {}^{trial}_{(i+1)}u_L^p = {}^{trial}_{(i)}u_L^p + \delta\Delta u_L^p \,, \; {}^{trial}_{(i+1)}u_R^p = {}^{trial}_{(i)}u_R^p + \delta\Delta u_R^p \,, $$

$$ {}^{trial}_{(i+1)}\theta_\eta^p = {}^{trial}_{(i)}\theta_\eta^p + \delta\Delta\theta_\eta^p \; \left(\eta = i, j, k\right), \; {}^{trial}_{(i+1)}R = {}^{trial}_{(i)}R + \delta\Delta R \quad (23a\text{-}d) $$

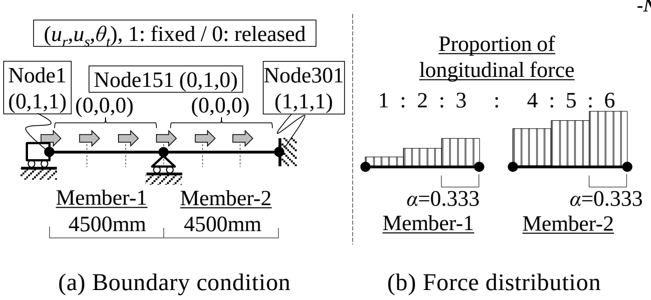
式(23)を各材端力成分の式に代入し、塑性化および座屈の進展により修正された材端力を算出する。

<修正値の収束判定>

式(19a,b)による収束の判定、塑性進展過程を全判定式が収斂するまでおこなう。収束が完了した場合、当該部材の計算を終了してここまでの計算の試行値を真値とし、式(11b)から接線剛性を算出し、次のステップへ進む。

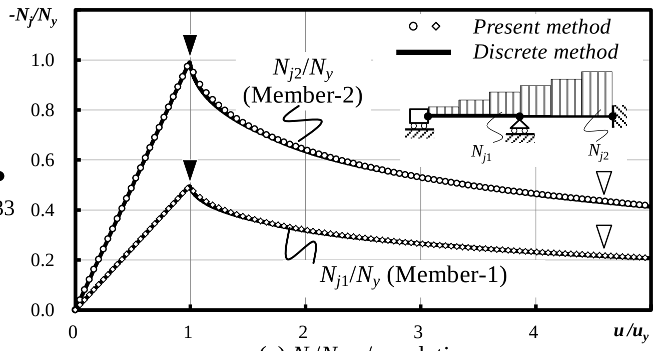
## ４． 数値解析例

本章では上記で示した中空円断面を例に取り、数値解析例に対して、部材を有限要素でモデル化した離散化手

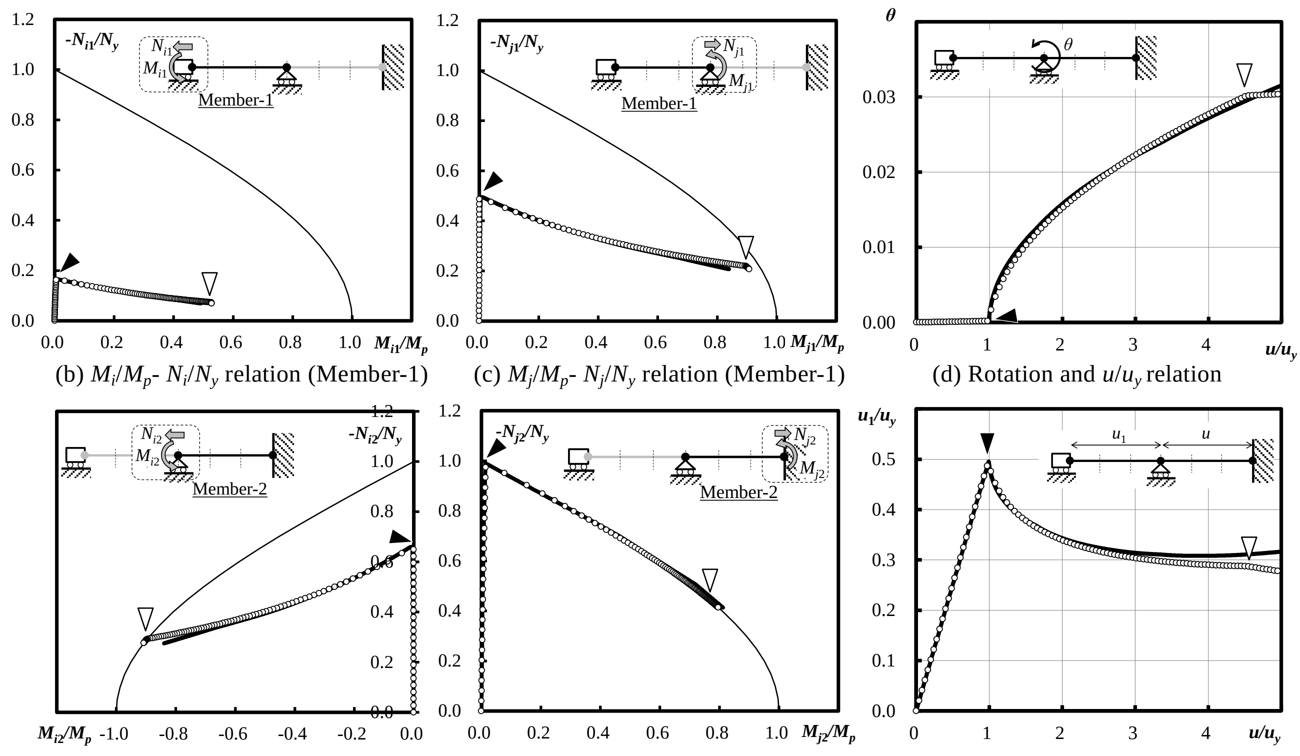



(a) Boundary condition (b) Force distribution

Fig.6 Analysis model




(a) $N_j/N_y$-$u/u_y$ relation




(b) $M_i/M_p$- $N_i/N_y$ relation (Member-1) (c) $M_j/M_p$- $N_j/N_y$ relation (Member-1) (d) Rotation and $u/u_y$ relation

(e) $M_i/M_p$- $N_i/N_y$ relation (Member-2) (f) $M_j/M_p$- $N_j/N_y$ relation (Member-2) (g) Stretch relation between members

Fig.7 Numerical results

法との比較により、提案した手法(提案手法)により得られる解析解の妥当性を検証する。

### 4.1 解析対象および解析条件

解析対象は Fig.6(a)に示す 2 つの上弦材(Member-1,2)である。中央の接合部(Node151)で互いに剛接合され、他端(Node1、Node301)は回転拘束される。中間軸方向力数は各部材 2 つ($S$=3)とし、Fig.6(b)に示す軸力分布を保持した単調載荷をおこなう。部材断面は外径 108.7mm、内径 103.4mm とする。ヤング係数は 205000N/mm、降伏応力度は 235N/mm$^2$ の完全弾塑性体とするが、離散化手法は微小な 2 次勾配を入力している。

提案手法においては、各弦材に対して 1 要素とみなす。材端力に関する収斂計算は第 3 章に準ずる。内部変位成分 $u_k$ に対して式(4a,b)から得られる以下の関係を用いる。

$$u_k = (\alpha - B)(u_i + u_L^p) + \{(1-\alpha) + B\}(u_j - u_R^p) + \{B - (2\alpha - 1)\}CR^2 \quad (24)$$

ここに、$B = (k_N / k_{\bar{N}}) \cdot (\bar{N}/N)$ である。塑性ヒンジ位置 $\alpha$ は、本例においてはいずれの部材も $\alpha = 0.333$ とする。

離散化手法に用いる解析モデルは、座屈による横変形を考慮するため、細かく分割された Euler-Bernoulli 梁要素により構成される。また、各弦材を 150 等分し、分割された各要素の軸方向 2 点の位置について Gauss 積分、断面周方向について 20 の Newton-Cotes 積分により、各積分点に対して弾塑性判定することで、断面の全塑性状態を再現する。なお数値計算の際には、与えた外力ベクトルに対する線形座屈固有値解析により得られる 1 次モードの最大振幅が $L$/20000 となる横たわみを与える。

### 4.2 解析結果および考察

Fig.7 に解析結果を示す。いずれの図においても、シンボルが提案手法、線が離散化手法による結果である。Fig.7 の(a)は $N_j/N_y$-$u/u_y$ 関係を、(b)および(c)は Member-1 の $M_i/M_p$-$N_i/N_y$ 関係および $M_j/M_p$-$N_j/N_y$ 関係を、(d)は接合された Node151 の回転角 $\theta$ と Member-2 の $u/u_y$ 関係を、(e)および(f)は Member-2 の $M_i/M_p$-$N_i/N_y$ 関係および $M_j/M_p$-$N_j/N_y$ 関係を、(g)は Member-2 と Member-1 の軸伸縮量関係を、それぞれ示す。ここに、$u_y$ は $N_{j2}$ が $N_y$ に達した時の軸伸縮量である。以下に解析例における材端力および変位の進展状況を説明する。図中の▼において Member-2 の右端(断面 J)と中間点 K が塑性化することによって最大耐力に達し、急激な劣化となる。この現象は離散化手法においても、同じ 2 つの位置で同時に塑性ヒンジが生じる結果となっている。その際、Member-2 の軸伸縮量 $u$ に対して Member-1 の軸伸縮量 $u$ が戻り、Member-1 の軸力が除荷される。このとき、Member-2 から見れば Member-1 により回転が拘束され、Member-1 から見ると、Node151 を介して Member-1 に曲げが生じる。この結果は、既往の手法 [4)]より一般的な状況を再現できる手法となっている。その後、▽で Member-2 の左端(断面 I)が全塑性状態に達する。両結果にはその後差異が生じるが、断面の部分的降伏区間において提案手法の仮定上生じるものである。以上の挙動が生じる解析例に対して、2 つの手法の $N_j/N_y$-$u/u_y$ 関係がよく一致し、$M_j/M_p$-$N_j/N_y$ 関係および $M_j/M_p$-$N_j/N_y$ 関係に関しても応力の分配経路まで精度よく追跡している。変位の進展に関しても、塑性率 3 程度までは非常に精度が良いと言える。

## 5. まとめ

本研究では、トラス梁を構成する弦材が構面外に弾塑性座屈するときの挙動を単一の要素で追跡できるようにするため、その前段として、弦材を一つの要素として解析する際の基本式および塑性流れ則の導出をおこなった。また、定式化した基本式等を用いて数値計算により解を得るための接線剛性係数と、Newton 法に基づく数値計算手順を示した。提案した手法の妥当性に関しては、離散化手法による解析解と比較することにより検証した。

提案手法は材端の拘束条件が剛である場合に対しても離散化手法と同等の軸力-軸方向変位関係および各塑性ヒンジ位置の曲げモーメント-軸力相関関係を得ることができ、座屈後の材端力および塑性流れ則が適切に評価可能な手法と言える。ただし、離散化手法と異なり、提案手法では断面の部分的降伏領域が再現されないが、この差異の改善は今後の課題とする。また今後は、提案手法のトラス梁要素への展開をおこなう。


**[参考文献]**

1) 日本建築学会:空間構造の数値解析ガイドライン, 2001
2) 例えば、日置興一郎, 村上益美, 山根一三:ラチスアーチの幾何学的非線形性を考慮した構面内弾性座屈について, 日本建築学会構造系論文報告集, No. 397, 1989. 3
3) 元結正次郎, 緒方誠二郎:トラス梁弦材の構面外座屈後挙動を考慮した梁要素モデル, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 74, No. 636, pp. 283-288, 2009. 2
4) 元結正次郎, 緒方誠二郎:軸力勾配を有する圧縮材の弾塑性座屈後挙動に関する数値解析手法, 日本建築学会構造系論文集, No. 613, pp. 59-65, 2007. 3
5) 元結正次郎, 大塚貴弘:トラス要素における弾塑性座屈挙動評価手法に関する研究, 構造工学論文集, Vol. 47B, pp. 603-610, 2001. 3
6) 沖佑典, 元結正次郎, 緒方誠二郎:トラス梁における弦材間の接合条件を考慮した構面外座屈後挙動の簡易解析手法 その 2 トラス梁線材置換モデルの妥当性検証および弦材の弾塑性座屈後挙動に関する数値解析手法, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B-1 分冊, pp. 365-366, 2014. 9
7) W.T.Koiter: Stress-strain Relations, Uniqueness and Variational Theories for Elastic-plastic Materials with Singular Yield Surfaces, Quart. Appl. Math., Vol.11, No.3, pp350-354, 1953
8) J.C.Simo, J.G.Kennedy and S.Govindjee: Non-Smooth Multisurface Plasticity and Viscoplasticity. Loading/Unloading Conditions and Numerical Algorithms, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.26, pp2161-2185, 1988



＊1 東京工業大学人間環境システム専攻　大学院生
＊2 東京工業大学環境・社会理工学院建築学系 教授・工博

# Numerical Method for Truss Chord Members with Rigid Connection Considering Post-Elasto-Plastic Buckling

〇Yusuke OKI＊1 Shojiro MOTOYUI＊2

Keywords : Chord member, Intermediate longitudinal forces, Lateral buckling, Post-buckling behavior, Plastic dissipation, Plastic hinge method

For true safety, it is important to analyze the collapse behavior for a spatial structure constructed from truss beams by calculating a numerical structural model. Such a structure is often analyzed by using a discrete method such as finite element method (FEM). The numerical model of the FEM has the huge number of degrees of freedom and is so costly, so that some researchers have presented novel simulation models where the plural components of the structure are regarded as one continuous element to reduce the calculation cost.

We have also developed the novel beam element called "truss beam element" to simulate the collapse behavior of the spatial structure composed of the truss beams. Although the truss beam element in the previous works had the accuracy to simulate the buckling behavior of the chord member in a truss beam by one element under the restricted boundary condition, the element could not be applied to the simulation for the whole of truss beam structure because most actual chord members in the truss beam structure are connected to each other rigidly.

In this paper, we focus on a chord member in the truss beam and derive the formulation for the chord member in which uniform intermediate longitudinal forces and moments at both ends are considered. The formulation is based on the thermodynamics. We also extend the method to an arbitrary cross-section shape.

As a result, we firstly obtained the elastic constitutive equations for an average longitudinal force, Intermediate longitudinal forces and moments acting on three plastic hinges. We also obtained the balance of moment at the middle plastic hinge and the plastic dissipation term at plastic hinges. Secondary, The plastic flow rule for the arbitrary cross-section shape is obtained by postulating the principle of the maximum plastic dissipation. In addition, we derived the elasto-plastic tangent stiffness, and we show the numerical procedure.

The accuracy of the present method is examined numerically through the comparison between the results by the present method and those by the discrete method. The target model is composed of the two chord members, and the rotation at each end is fixed and both members are connected to each other rigidly. The cross-section shape is tube (outer diameter=108.7mm, inner diameter=103.4mm). The number of longitudinal forces($S$-1) is two per each chord member. We show the relations between the longitudinal forces at the left edge of each member and stretch of one member, the moment and the longitudinal force orbits at both ends of the members, and other numerical results simulated by the present and discrete methods. Consequently, the buckling behavior calculated by the present method is close to the behavior simulated by the discrete method, except for the process of partially plastic region in cross section. Hence we can conclude that the present method suggested here can evaluate the local elasto-plastic buckling behavior in a chord member as one element. In our future work, this method will be extended to the truss beam element.

＊1 Graduate Student, Dept. of Built Environment, Tokyo Institute of Technology
＊2 Prof., Dept. of Architecture and Building Engineering, School of Environment and Society, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.