

# 剛体追加による剛な Panel-hinge フレームワークの生成手法

○小林 祐貴\*<sup>1</sup> 伊藤 仁一\*<sup>2</sup>  
加藤 直樹\*<sup>3</sup>

キーワード： 組合せ剛性理論 形態生成 Panel-hinge フレームワーク

## 1. はじめに

立方体によって充填された空間充填立体を考える。この時、単位立方体は6枚の面によって構成されており、面同士はヒンジによってつながれている。座標がすべて整数の格子点を考え、立方体の各頂点が格子点上にあるとする。単位立方体の  $x$  座標、 $y$  座標、 $z$  座標の各々が最小の頂点を代表点として選ぶ。この時、代表点の  $x$  座標、 $y$  座標、 $z$  座標が全て奇数である単位立方体の6面すべてを取り除いてできる立体は、ねじれ正多面体またはスポンジと呼ばれる Coxeter<sup>1)</sup> によって発見された多面体の一つである。

多面体を構成する面が  $p$  角形であり、一つの頂点周りの面の数を  $q$ 、面を取り除くことによってできる多面体の穴が  $l$  角形であるねじれ正多面体を、 $p$  角  $q$  片  $l$  角孔ねじれ正多面体と呼び、 $(p, q | l)$  と表現する<sup>2)</sup>。

この時、立方体によるねじれ正多面体は  $(4, 6 | 4)$  と表現することができ、3次元のねじれ正多面体は  $(4, 6 | 4)$ ,  $(6, 4 | 4)$ ,  $(6, 6 | 3)$  の3種類のみ存在することが知られている。Coxeter はさらに、 $(4, 6 | 4)$  は剛な立体ではなく、紙などで模型を作る際には注意が必要だということを論文中で述べている。

本研究では、整数  $n \geq 3$  とした時、大きさ  $n \times n \times n$  の  $(4, 6 | 4)$  に対して、1つの立方体を追加することによって剛にすることができることを明らかにした。この時、追加する立方体の位置はどの場所でも良いわけではなく、後述する場所に立方体を追加する必要がある。さらに、剛な立体である  $(6, 4 | 4)$ ,  $(6, 6 | 3)$  については異なる面の取り除き方を行うことにより、柔軟な立体を生成した。

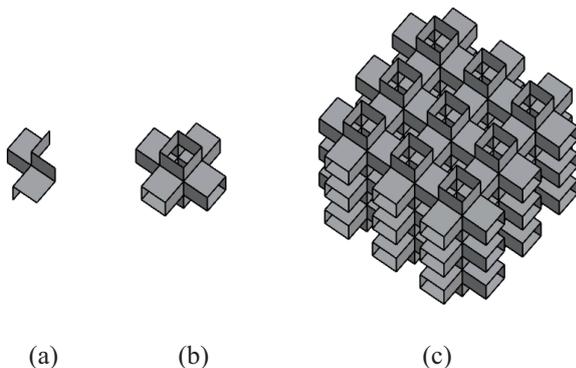


図 1 (a) 1つの頂点周りに接続する面 (b) 大きさ  $3 \times 3 \times 3$  の  $(4, 6 | 4)$  (c) 大きさ  $7 \times 7 \times 7$  の  $(4, 6 | 4)$

## 2. 準備

### 2.1 Panel-Hinge フレームワークの剛性行列

以下の panel-hinge フレームワークの剛性行列の定義は文献<sup>3)</sup>に従う。

パネルの合同変換は同次座標系を用いることで、平行移動と回転を共に含んだ  $4 \times 4$  の行列  $M$  で表すことができる。ここで、2つのパネル  $B, B'$  がヒンジ  $H$  によって接続されているとし、 $H$  の両端点の同次座標を  $\mathbf{p}_1 = (p_{1,x}, p_{1,y}, p_{1,z}, 1)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (p_{2,x}, p_{2,y}, p_{2,z}, 1)$  とする。そして、パネルの動きを表す行列  $M, M'$  がそれぞれ  $B, B'$  に与えられているとする。このとき、ヒンジによる制約は  $M\mathbf{p}_1 = M'\mathbf{p}_1, M\mathbf{p}_2 = M'\mathbf{p}_2$  と表すことができる。この等式を微分して、以下の式が得られる。

$$I\mathbf{p}_i = I'\mathbf{p}_i \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (1)$$

$I$  および  $I'$  は  $B, B'$  に割り当てられた無限小動きとみなすことができる。 $I = \begin{pmatrix} R & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  とあらわすことができる

と知られている。ここで  $R$  は  $R = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$ ,

$v = (v_x, v_y, v_z)$  である。同様に  $I'$  も  $\begin{pmatrix} R' & v' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  と表すことができる。(1) に代入して整理すると以下の式が得られる。(1) に代入して整理すると以下の式が得られる。

$$\left( \begin{array}{cc|c} \omega_y - \omega'_y & \omega_z - \omega'_z & v_x - v'_x \\ p_{1,y} & p_{1,z} & p_{1,y} - p'_{1,y} \\ \hline \omega_y - \omega'_y & \omega_z - \omega'_z & v_y - v'_y \\ p_{1,y} - p_{2,y} & p_{1,z} - p_{2,z} & p_{1,y} - p_{2,y} \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} \omega_y - \omega'_y & \omega_z - \omega'_z & v_x - v'_x \\ p_{1,y} - p_{2,y} & p_{1,z} - p_{2,z} & p_{1,y} - p_{2,y} \\ \hline \omega_y - \omega'_y & \omega_z - \omega'_z & v_x - v'_x \\ p_{1,y} - p_{2,y} & p_{1,z} - p_{2,z} & p_{1,y} - p_{2,y} \end{array} \right) = 0$$

$$(\omega - \omega', v - v') = t \left( \begin{array}{c|c} p_{1,x} & 1 \\ p_{2,x} & 1 \end{array} \right), - \left( \begin{array}{c|c} p_{1,y} & 1 \\ p_{2,y} & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c|c} p_{1,z} & 1 \\ p_{2,z} & 1 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} p_{1,y} & p_{1,z} & p_{1,y} - p_{2,y} \\ p_{2,y} & p_{2,z} & p_{2,y} - p_{2,z} \end{array} \right) \quad (2)$$

(2) の左辺はヒンジでつながれた両側の剛体の無限小動きを表わしており、右辺の6次元ベクトルはヒンジによる制約を表している。

ここで、panel-hinge フレームワーク  $(G, \mathbf{p})$  を、グラフ  $G = (V, E)$  と各辺  $e \in E$  の  $\mathbf{p}(e)$  に関する埋込み  $\mathbf{p}$  の組

とする。 $\mathbf{p}(e)$  は  $e$  に対応するヒンジの埋込みとする。無限小動きの定義より、すべての  $e = uv \in E$  について、以下の等式を満たす無限小動きに直交するベクトル  $r_i(\mathbf{p}(e))$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) をとることができ、以下の式が成り立つ。このとき  $S$  を  $(G, \mathbf{p})$  の無限小動きとよぶ。

$$(S(u) - S(v)) \cdot r_i(\mathbf{p}(e)) = 0$$

すなわち、(1) 式の無限小動きは  $5|E|$  個の等式で記述され、 $5|E| \times 6|V|$  の行列  $R(G, \mathbf{p})$  を

$$R(G, \mathbf{p}) =_{e=uv} \begin{pmatrix} \cdots & u & \cdots & v & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & r(\mathbf{p}(e)) & \cdots & 0 & \cdots & -r(\mathbf{p}(e)) & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

とする。ここで、 $r(\mathbf{p}(e))$  は  $5 \times 6$  の行列であり、 $r_i(\mathbf{p}(e))$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) である。この  $R(G, \mathbf{p})$  を剛性行列と呼び、 $R(G, \mathbf{p})$  のランクが  $6(|V| - 1)$  と等しい場合、そのフレームワークは剛であることが知られている<sup>3)</sup>。 $R(G, \mathbf{p})$  が、すべての部分グラフにおいて最大のランクをもつとき、そのフレームワークは一般的であるという<sup>2)</sup>。

## 2.2 Panel-Hinge フレームワークの組合せ的な特徴づけ

**panel-hinge** フレームワークの組合せ的な特徴づけとして、以下の定理が知られている<sup>3)</sup>。

**定理 1** 一般のヒンジ配置の 3 次元 panel-hinge フレームワークが剛であることの必要十分条件は、フレームワークに対応する panel-hinge グラフを 5 重化したグラフに、6 個の全域木を詰め込み可能なことである。

定理 1 から以下の補題がわかる。

**補題 1** panel-hinge フレームワークに対応する panel-hinge グラフが  $6|V| - 6 \leq 5|E|$  を満たすことは、一般の配置の 3 次元 panel-hinge フレームワークが剛であることの必要条件である。

## 3. ねじれ正多面体を剛にする手法

整数  $n \geq 3$  としたとき、大きさ  $n \times n \times n$  の  $(4, 6 | 4)$  を剛にする手法を提案するために、以下の 3 つの操作を定義する。

**操作 1 (Add 1-panel)** 剛体に対して、1 枚のパネルを追加する (図 2)。

**操作 2 (Add 2-panel)** 剛体に対して、互いにヒンジによってつながれた 2 枚のパネルを追加する (図 3(a))。

**操作 3 (Add 4-panel)** 剛体に対して、互いにヒンジによってつながれた 4 枚のパネルを追加する (図 3(b))。

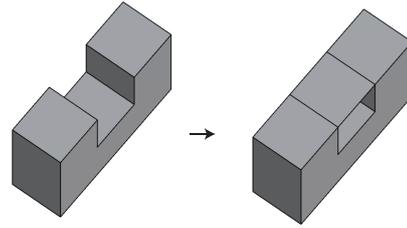


図 2 操作 1

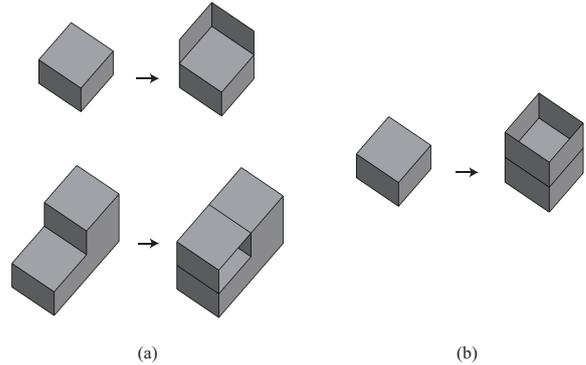


図 3 (a) 操作 2 (b) 操作 3

このとき、以下の補題を示すことができる。

**補題 2** 剛なフレームワークに対して、操作 1, 2, 3 のいずれの操作を行った場合においても、操作後のフレームワークもまた剛である。

補題 2 は、各操作について剛性行列を考え、証明することができる。証明方法は文献<sup>4)</sup>と同様であり、本稿では省略する。

さらに、以下の補題を示すことができる。

**補題 3** 大きさ  $3 \times 3 \times 3$  の  $(4, 6 | 4)$  に剛な立方体を 1 つ追加することにより、全体を剛にすることができる。

**証明** : 立方体の各面に対して、操作 3 を行うことにより、剛なフレームワークを得ることができる。このフレームワークは大きさ  $3 \times 3 \times 3$  の  $(4, 6 | 4)$  に対して剛な立方体を追加したフレームワークと一致する。 □

さらに、大きさ  $n \times n \times n$  の  $(4, 6 | 4)$  を剛にするために、以下の操作列を定義する。

**操作列 1** (i) 操作 2 を行う (図 4(a))。

(ii) 操作 2 を行う (図 4(b))。

(iii) 操作 1 を行う (図 4(c))。

(iv) 操作 3 を行う (図 4(d))。

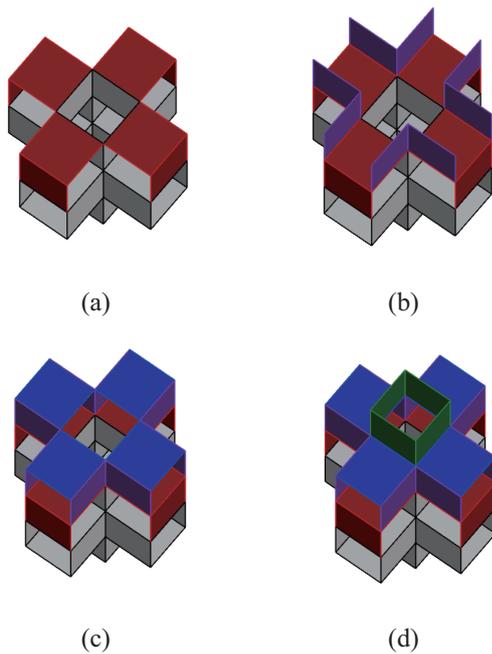


図 4 操作列 1

操作列 1 を用いることにより、以下の定理を示すことができる。

**定理 2** 剛体を追加した  $3 \times 3 \times 3$  の  $(4, 6 | 4)$  に対して、操作列 1 を用いることで剛な  $7 \times 7 \times 7$  の  $(4, 6 | 4)$  を得ることができる。同様に剛体を一つ追加することで  $n \times n \times n$  の  $(4, 6 | 4)$  を剛にすることができる。

**証明** : 剛体が追加された大きさ  $3 \times 3 \times 3$  の  $(4, 6 | 4)$  (図 5(a)) に対して、各方向に対して操作列 1 を行う (図 5(b))。操作 2, 操作 3 を行うことで図 5(c) の剛なフレームワークを得ることができる。さらに、操作 2, 操作 3 を行うことで図 5(d) の剛なフレームワークを得ることができ、このフレームワークは  $7 \times 7 \times 7$  の  $(4, 6 | 4)$  に対して、一つの剛体を追加したフレームワークに一致する。

同様に、この操作を繰り返すことができ、 $n \times n \times n$  の  $(4, 6 | 4)$  についても、一つの剛体を追加して剛なフレームワークを得ることができる。 □

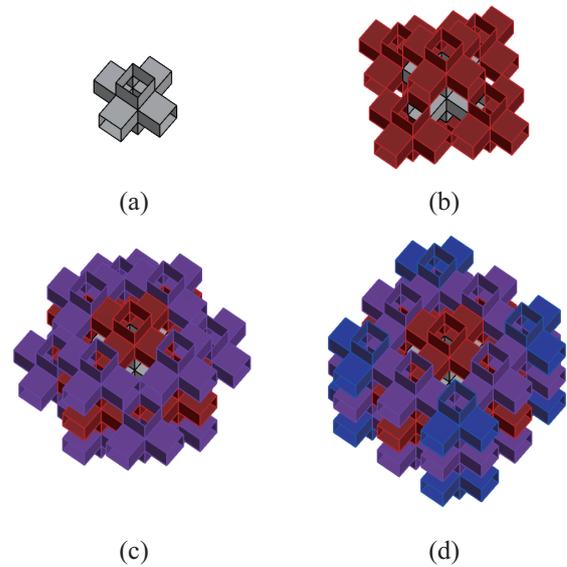


図 5 剛体が追加された大きさ  $3 \times 3 \times 3$  の  $(4, 6 | 4)$  から  $7 \times 7 \times 7$  を作る過程。

#### 4. 柔軟な空間充填立体

##### 4.1 $(6, 4 | 4)$ に基づく柔軟な多面体

$(6, 4 | 4)$  は切頂八面体を充填した立体から、正方形の面を全て取り除いてできる、ねじれ正多面体である。

$(6, 4 | 4)$  は剛な立体であるが、切頂八面体の正方形のみではなく、異なる面の取り除き方をした柔軟な切頂八面体を単位として、空間充填することで柔軟な立体を得ることができる。

このとき、切頂八面体から 4 枚の六角形と 2 枚の四角形を取り除いた多面体を 2 種類考え (図 6)、この切頂八面体を空間充填することで、より大きく柔軟な立体を得ることができる (図 7)。

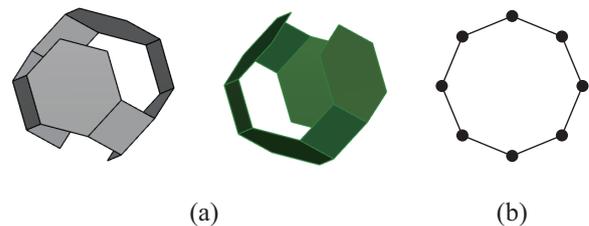


図 6 (a) 切頂八面体から 4 枚の六角形と 2 枚の四角形を取り除いた多面体 (b) (a) の panel-hinge フレームワークに対応する panel-hinge グラフ

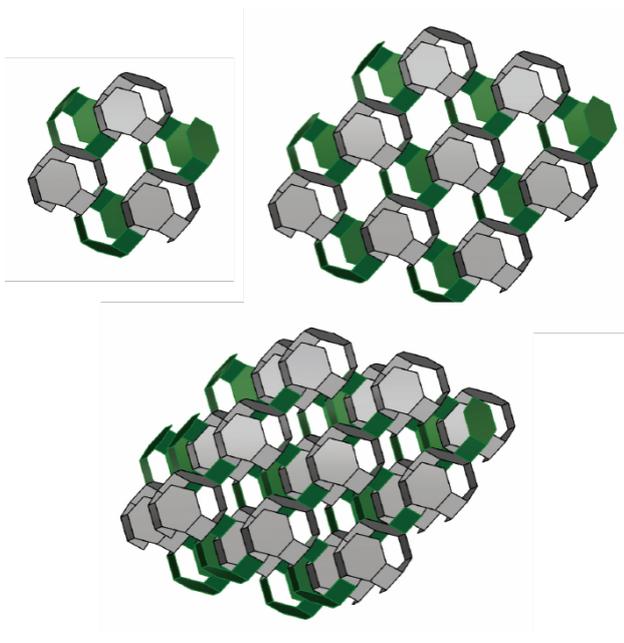


図 7 (6, 4 | 4) に基づく柔軟な多面体

#### 4.2 (6, 6 | 3) に基づく柔軟な多面体

(6, 6 | 3) も Coxeter が発見した多面体の一つであり、切頂四面体と正四面体からなる空間充填立体から、正四面体の部分を全て取り除いてできる立体である。

このとき、(6, 4 | 4) と同様に、(6, 6 | 3) は剛な立体であり、柔軟な立体を作ることを考える。ここで、(6, 4 | 4) と異なり、単位となる切頂四面体について考えたとき、単体では閉じていて柔軟な多面体を作ることはできない。

ここで、2 つの切頂四面体 (図 8(a)) と 2 つの正四面体を一つの組として考えると、2 つの三角形と六角形で、できる四角形を一つの面として捉えたとき、六面体を構成している (図 8(b))。したがって、この六面体を単位とした空間充填立体とみなすことができる。このため、正六面体を単位としている (4, 6 | 4) と同様に、面を取り除くことで、柔軟な立体を作ることができる (図 9)。

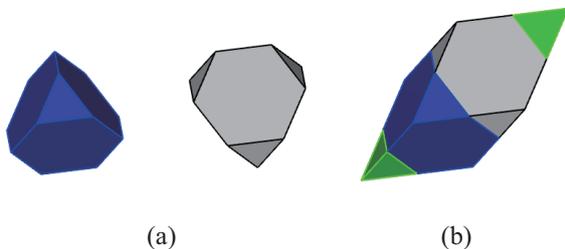


図 8 (a) 切頂四面体 (b) 2 つの切頂四面体と 2 つの正四面体の組によってできる六面体

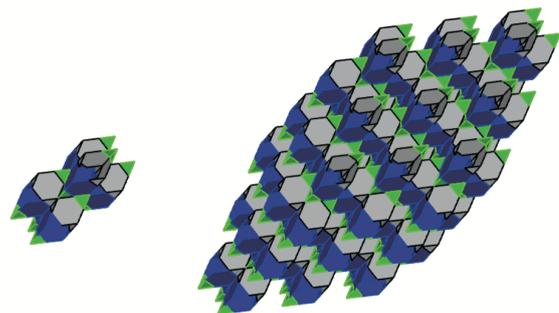


図 9 (6, 6 | 3) に基づく柔軟な多面体

#### 5. まとめ

Coxeter が発見した 3 つのねじれ正多面体 (4, 6 | 4), (6, 4 | 4), (6, 6 | 3) について、(4, 6 | 4) を一つの剛体を追加することによって、フレームワーク全体を剛にすることができることを明らかにした。さらに、(6, 4 | 4), (6, 6 | 3) と同様の空間充填立体については、柔軟なフレームワークを作ることができた。

謝辞 : 本研究は、JST, CREST JPMJCR1402, JSPS 科研費 JP17K12868, 15KT0020 の助成を受けたものです。

#### 【参考文献】

- 1) H. S. M. Coxeter: “Regular skew polyhedra in three and four dimensions, and their topological analogues”, Proc. London Math. Soc., 2(43):33-62, 1937. Improved reprint in: Twelve Geometric Essays, Southern Illinois University Press, Carbondale IL, 1968. Reissued as: Dover, 1999.
- 2) B. Jackson and T. Jordan: “The generic rank of body-bar-and-hinge frameworks”, European Journal of Combinatorics, 31(2):574-588, 2009.
- 3) N. Katoh, S. Tanigawa: “A proof of the molecular conjecture”, Discrete Comput Geom, 45:647-700, 2011.
- 4) Y. Kobayashi, N. Katoh, T. Okano, and A. Takizawa: “An inductive construction of rigid panel-hinge graphs and their applications to form design”, The International Journal of Architectural Computing, 13(1):45-63, 2015.
- 5) 一松信: “正多面体を解く”, 東海大学出版会, 2002.

- \*1 東京工業大学 環境・社会理工学院 助教  
 \*2 椋山女学園大学 教育学部 教授  
 \*3 関西学院大学 理工学部 教授