基礎杭の最適設計手法の提案と実践

○藤田 慎之輔[*1]

キーワード：構造最適化 メタヒューリスティクス 基礎杭

1 はじめに

建築物の構造設計において，基礎杭の設計は非常に重要な要素の一つであり，地盤という不確定要素に対して堅牢な設計を慎重に行う必要がある。一般に実務においては，杭位置に支点を設けた上部構造モデルを解析し設計を行い，得られた反力を元に杭の設計を行うが，設計期間の終盤というのは時間の制約が厳しい場合が多く，杭の詳細な設計に十分な時間が割かれていないのが現状である。一方，現場において杭工事は最初に行われる躯体工事である。構造設計のプロセスにおいて最も後回しにされるものが，現場においては最初に施工されるというジレンマは，杭に対して堅牢な設計を慎重に行うという要求を困難なものとしている。

そのような問題を解決するために，最適化手法を用いた基礎杭の設計手法を提案し，実際に想定される地盤や建物条件に対して同手法を適用する。

2 基礎杭の構造設計

前述した通り，一般に実務においては，杭位置に支点を設けた上部構造モデルを解析し設計を行い，得られた反力を元に杭の設計を行うことが多い。基礎杭の構造設計では，各杭に作用する長期/短期の設計軸力ならびに地震時に作用するせん断力を既知量として，以下の項目を満足することを確認することとなる。

1. 基礎杭の許容支持力 ≥ 基礎杭に作用する軸力
2. 基礎杭の許容応力 ≥ 基礎杭に作用する応力

1，2 について満足する杭の最適断面を求めることを目的とする。ただし，本報告では，計算の簡単のため杭種は鋼管杭に限定する。2 について，地震時の曲げモーメントと軸力の合応力に対して及びせん断力に対して許容応力度設計を行う。なお，地盤の塑性化は考慮しないものとする。

2.1 基礎杭に作用する曲げモーメントとせん断力

基礎杭に作用する曲げモーメントとせん断力を求めるために，杭体を弾性床上の梁と考えた伝達マトリクス法による多層地盤解析を行う[1)]。

まず，基礎杭を n 個に要素分割し，i 番目の要素に着目する。要素分割は，定式化の都合上，杭頭を第 n 層，杭先端を第 1 層とする。各要素内では曲げ剛性，地盤バネの値が一定とすれば，弾性床上の梁の微分方程式は次式で表される。

$$E_i I_i \frac{d^4 y}{dx^4} + k_{\mathrm{h}}^i y = 0 \tag{1}$$

$E_i I_i$	:	i 番目の要素の曲げ剛性 (断面一定なら i は不要)
x	:	i 番目の要素の鉛直方向座標 ($0 \le x \le L_i$)
y	:	位置 x における杭の変位
L_i	:	i 番目の要素の長さ
k_{h}^i	:	i 番目の要素の地盤反力係数 ($= 700N$)
N	:	柱状図から得られる N 値

基礎杭の曲げ剛性を杭頭部分で代表すれば，この式の一般解は $\beta = \sqrt[4]{k_{\mathrm{h}} B_{\mathrm{p}} / 4E_n I_n}$ として次式で表される。なお，A,B,C,D は積分定数である。

$$y = e^{\beta x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) + e^{-\beta x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x) \tag{2}$$

たわみ角，曲げモーメント，せん断力は次式となる。

$$\begin{aligned} y' = \beta \big[& e^{\beta x}\{(A+B)\cos\beta x + (B-A)\sin\beta x\} \\ & + e^{-\beta x}\{(-C+D)\cos\beta x - (C+D)\sin\beta x\}\big] \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} y'' = 2E_i I_i \beta^2 \big[& e^{\beta x}\{B\cos\beta x - A\sin\beta x\} \\ & + e^{-\beta x}\{-D\cos\beta x + C\sin\beta x\}\big] \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} y''' = 2E_i I_i \beta^3 \big[& e^{\beta x}\{(B-A)\cos\beta x - (A+B)\sin\beta x\} \\ & + e^{-\beta x}\{(C+D)\cos\beta x - (C-D)\sin\beta x\}\big] \end{aligned} \tag{5}$$

各要素で $x(0 \le x \le L_i)$ は鉛直下向き方向を正にとるものとする。杭先端をピンとした場合，第 1 層の境界条件 ($x = 0$ で変位 y および曲げモーメント y'' が 0) から次式が成立する。

$$A_1 + C_1 = 0 \qquad 2\beta_1^2(B_1 - D_1) = 0 \tag{6}$$

また，$\xi_{i+1} = \beta_{i+1}/\beta_i$ とおくと，第 i 層と $i+1$ 層の変位，たわみ角，曲げモーメント，せん断力の適合条件から次式が成立する。

$$a_i A_i + b_i B_i + c_i C_i + d_i D_i = A_{i+1} + C_{i+1} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & (a_i - b_i)A_i + (a_i + b_i)B_i - (c_i + d_i)C_i + (c_i - d_i)D_i \\ & = \xi_{i+1}(A_{i+1} + B_{i+1} - C_{i+1} + D_{i+1}) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} & E_i I_i(-b_i A_i + a_i B_i + d_i C_i - c_i D_i) \\ & = E_{i+1} I_{i+1}\left\{\xi_{i+1}^2 (B_{i+1} - D_{i+1})\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} & E_i I_i\{-(a_i+b_i)A_i + (a_i-b_i)B_i + (c_i-d_i)C_i + (c_i+d_i)D_i\} \\ & = E_{i+1} I_{i+1}\left\{\xi_{i+1}^3 (B_{i+1} - A_{i+1} + C_{i+1} + D_{i+1})\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

杭頭固定とすれば，たわみ角が 0 で杭頭せん断力 Q_0 を受ける条件より次式が得られる。

$$(a_n - b_n)A_n + (a_n + b_n)B_n + (-c_n - d_n)C_n + (c_n - d_n)D_n = 0 \tag{11}$$

$$-(a_n + b_n)A_n + (a_n - b_n)B_n + (c_n - d_n)C_n + (c_n + d_n)D_n = -\frac{Q_0}{2E_n I_n \beta_n^3} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} a_i &= e^{\beta_i L_i}\cos\beta_i L_i, & b_i &= e^{\beta_i L_i}\sin\beta_i L_i \\ c_i &= e^{-\beta_i L_i}\cos\beta_i L_i, & d_i &= e^{-\beta_i L_i}\sin\beta_i L_i \end{aligned} \tag{13}$$

以上をマトリクス表示すれば次式となる。

$$\boldsymbol{KA} = \boldsymbol{f} \tag{14}$$

$$
\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & -1 & & & & & & \\
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & -1 & 0 & -1 & 0 & & \\
a_1-b_1 & a_1+b_1 & -c_1-d_1 & c_1-d_1 & -\xi_2 & -\xi_2 & \xi_2 & -\xi_2 & & \\
-b_1 & a_1 & d_1 & -c_1 & 0 & -\xi_2^2 & 0 & \xi_2^2 & & \\
-(a_1+b_1) & a_1-b_1 & c_1-d_1 & c_1+d_1 & \xi_2^3 & -\xi_2^3 & -\xi_2^3 & \xi_2^3 & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \cdots c_n-d_n \\
 & & & & & & & & & \cdots c_n+d_n
\end{bmatrix} \tag{15}
$$

$$
\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{Q_0}{2E_nI_n\beta_n^3} \end{bmatrix}^\top \tag{16}
$$

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & \cdots & A_n & B_n & C_n & D_n \end{bmatrix}^\top \tag{17}
$$

まず，杭頭せん断力を算出する。$Q_0 = 1\mathrm{kN}$ として連立方程式 (14) を解き積分定数 $\mathbf{A}$ を求め，式 (2) に代入することで，単位荷重あたりの杭の水平変位分布が得られる。特に杭頭変位を $\bar{\delta}$ とすれば，杭の水平剛性は

$$
\bar{k} = 1/\bar{\delta} \tag{18}
$$

となる。杭の総本数を m とし，e 番目の杭の水平剛性を ${}_e\bar{k}$ とし，地震時に作用するせん断力 (既知量) を Q とし，杭頭はすべて同一変位するものとすれば，各杭の杭頭せん断力 ${}_eq$ は次式で計算することができる。

$$
{}_eq = {}_e\bar{k}Q \Big/ \sum_{i=1}^{m} {}_i\bar{k} \tag{19}
$$

各杭の杭頭せん断力 q_e が求められれば，$Q_0 = q_e$ として再び連立方程式 (14) を解き積分定数 $\mathbf{A}$ を求め，式 (4) 及び式 (5) に代入することで杭体の曲げモーメント及びせん断力分布が得られる。

2.2 基礎杭の許容支持力

基礎杭の許容支持力は杭体で決まる支持力と地盤で決まる支持力のいずれか小さい方で決定される。いずれも，基礎杭の工法や種類によって支持力の計算式が異なるが，ここでは次式によって支持力が計算される鋼管杭を想定する。

$$
\begin{aligned}
N_{aL} &= \max\left\{\frac{1}{3}\alpha\cdot\bar{N}\cdot A_p,\quad \frac{\bar{F}}{1.5}\cdot A\cdot(1-\alpha_1)\right\} \\
N_{aS} &= \max\left\{\frac{2}{3}\alpha\cdot\bar{N}\cdot A_p,\quad \bar{F}\cdot A\cdot(1-\alpha_1)\right\} \\
\bar{F} &= \begin{cases} F\cdot\left(0.8+\dfrac{2.5t}{B/2}\right) & \cdots \text{ if } \quad \dfrac{t}{B/2}\le 0.08 \\ F & \cdots \text{ otherwise} \end{cases} \\
\alpha_1 &= \begin{cases} 0 & \cdots \text{ if } \quad l/B \le 100 \\ \dfrac{l/B-100}{100} & \cdots \text{ otherwise} \end{cases}
\end{aligned} \tag{20}
$$

N_{aL}, N_{aS}	:	長期／短期許容支持力
B, t, l, D_w	:	杭の軸径，板厚，全長，先端の径
A, A_p	:	杭の軸断面積，先端部面積
$\bar{N}$	:	先端から上下 $1D_w$ の平均 N 値
F	:	鋼材の F 値
$\bar{F}$	:	低減 F 値
α_1	:	長さ／径比による低減率
α	:	杭先端支持力係数で，工法により異なるが ここでは砂質土で 184，粘性土で 150 とする

長期及び短期の軸力に対し次式を満足する必要がある。

$$
N_L \le N_{aL}, \quad N_L + |N_E| \le N_{aS} \tag{21}
$$

$$
N_L, N_E \quad : \quad \text{長期荷重時／地震時の軸力}
$$

ここで，一般に地震時の検討は X,Y の 2 方向について正加力時と負加力時の計 4 ケースを検討するが，地震時の軸力 N_E は X,Y の 2 方向の正加力時の軸力のうち大きい方の値であるものとする。

2.3 基礎杭の許容応力

地震時の応力に対しては通常の鉄骨造の断面算定の場合と同様に次式を満足する必要がある。

$$
\frac{M_{S\max}}{Z} + \frac{N_L + |N_E|}{A} \le \bar{F} \tag{22}
$$

$$
\frac{2Q_{S\max}}{A} \le f_s \tag{23}
$$

$M_{S\max}$	:	杭体の短期荷重時曲げモーメントの最大値
$Q_{S\max}$	:	杭体の短期荷重時せん断力の最大値
Z	:	杭体の断面係数
f_s	:	鋼材の許容せん断応力度で $F/\sqrt{3}$ とする

後の定式化の簡略化のため，上式を断面力の式に変形しておく。

$$
\begin{aligned}
M_{S\max} &\le M_{aS} \\
M_{aS} &= \left(\bar{F} - \frac{N_L + |N_E|}{A}\right)\cdot Z
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{S\max} &\le Q_{aS} \\
Q_{aS} &= \frac{A\cdot f_s}{2}
\end{aligned} \tag{25}
$$

片土圧を受ける建物などの特殊な場合を除き，せん断力及び曲げモーメントは地震荷重に対してのみ発生するので，短期荷重時の曲げモーメント及びせん断力は地震時に作用する曲げモーメント及びせん断力そのものであり，2.1 節の多層地盤解析から計算する。

なお，基礎杭の長さはある程度規格化されており，杭長が長い場合は継手が出てくる。上杭と下杭の径は揃えるのが原則であるが，板厚に関しては上杭よりも杭体曲げモーメントの小さい下杭の方を薄くすることがある。従って，式 (24) や式 (25) は各杭について継手の数 +1 個存在する (断面ごとに分けた領域で立式される)。

3 最適化問題の定式化

最大継手数を n_j とし，各基礎杭の断面を上杭から順に $1,\cdots,n_j$+1 と番号付けする。基礎杭の番号を左下添字，各杭の断面を上杭から順に数えた番号を左上添字で表す。例えば，${}_e^jZ$ は e 番目の基礎杭の上から j 番目の杭の断面係数となる。また，杭断面及び杭長はあらかじめ与えられたリストから選択するものとし，杭断面の種類数を n_p，杭長の種類数を n_L とする。ベクトル $\boldsymbol{x} \in [1,\cdots,n_p]$ とベクトル $\boldsymbol{y} \in [1,\cdots,n_L]$ を次のように定義する。

$$
\boldsymbol{x} = [x_{11},\cdots,x_{1n_j+1},x_{21},\cdots,x_{mn_j+1}]^\top \tag{26}
$$

$$
\boldsymbol{y} = [y_{11},\cdots,y_{1n_j+1},y_{21},\cdots,y_{mn_j+1}]^\top \tag{27}
$$

杭断面は $\boldsymbol{x}$ によって選択されるものとする。例えば，杭断面リストにおける杭の軸径の値を $\bar{B}_1\cdots,\bar{B}_{n_p}$ とすると，e 番目の基礎杭の上から j 番目の杭の軸径は次式で与えられる。

$$
{}_e^jB = \begin{cases} \bar{B}_1 & \cdots \quad \text{if} \quad x_{ej}=1 \\ \vdots & \\ \bar{B}_{n_p} & \cdots \quad \text{if} \quad x_{ej}=n_p \end{cases} \tag{28}
$$

その他の断面性能も同様である。一方，杭長は $\boldsymbol{y}$ によって選択されるものとする。例えば，杭長リストの値を $\bar{L}_1,\cdots,\bar{L}_{n_L}$ とすると，e 番目の基礎杭の上から j 番目の杭の杭長は次式で与えられる。

$$
{}^{j}_{e}L = \begin{cases} \bar{L}_1 & \cdots \quad \text{if} \quad x_{ej} = 1 \\ & \vdots \\ \bar{L}_{n_L} & \cdots \quad \text{if} \quad x_{ej} = n_p \end{cases} \tag{29}
$$

以上のルールを踏まえ，基礎杭に対し，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を設計変数とする次のような組合せ最適化問題を考える。

$$
\text{minimize} \quad \sum_{e=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_j+1} {}^{j}_{e}A \cdot {}^{j}_{e}L \tag{30a}
$$

$$
\text{subject to} \quad {}^{j}_{e}N_L \leq {}^{j}_{e}N_{aL} \quad \begin{matrix} e = 1, \cdots, m \\ j = 1, \cdots, n_j + 1 \end{matrix} \tag{30b}
$$

$$
{}^{j}_{e}N_S \leq {}^{j}_{e}N_{aS} \quad \begin{matrix} e = 1, \cdots, m \\ j = 1, \cdots, n_j + 1 \end{matrix} \tag{30c}
$$

$$
{}^{j}_{e}M_S \leq {}^{j}_{e}M_{aS} \quad \begin{matrix} e = 1, \cdots, m \\ j = 1, \cdots, n_j + 1 \end{matrix} \tag{30d}
$$

$$
{}^{j}_{e}Q_S \leq {}^{j}_{e}Q_{aS} \quad \begin{matrix} e = 1, \cdots, m \\ j = 1, \cdots, n_j + 1 \end{matrix} \tag{30e}
$$

$$
{}^{i}_{e}B = {}^{i+1}_{e}B \quad \begin{matrix} e = 1, \cdots, m \\ i = 1, \cdots, n_j \end{matrix} \tag{30f}
$$

$$
\frac{{}^{e}l}{{}^{j}_{e}B} \leq 130 \quad \begin{matrix} e = 1, \cdots, m \\ j = 1, \cdots, n_j \end{matrix} \tag{30g}
$$

ここで，${}^{j}_{e}L$ は e 番目の基礎杭の上から j 番目の杭体の杭長であり，基礎杭の全長 l とは ${}_{e}l = \sum_{j=1}^{n_j} {}^{j}_{e}L$ の関係にある。この最適化問題は，杭断面と杭長の組み合わせを設計変数とし，支持力及び応力の制約条件の下で，基礎杭の総体積を最小化する問題である。ただし，施工上の制約条件として，継杭となる場合にはすべて同一径とするような制約条件 (30f) を課している。また，極端に杭長/径比が大きい場合も施工時のトルク荷重に耐えられないため，制約条件 (30g) によって杭長/径比を 130 以下に制約することとした。

4 数値解析例

例として，次のような条件の基礎を考える。

1. 上部構造からの地震時せん断力は $Q = 1000$kN とする。
2. 基礎杭は全部で 6 か所施工され，平面的な杭配置はあらかじめ決められており，軸力 N_L および N_E は表 1 に示す 2 ケースを考える (引き抜きは生じない設定としている)。
3. 継手は最大 1 か所まで ($n_j = 1$) とする。
4. 杭の長さ (全長ではない) は 0.0m, 1.5m，3m，4.5m，6m のいずれかとする。
5. 杭の断面種類は全部で 22 種類とし，表 2 から選択されるものとする。
6. 杭の F 値は 325N/mm^2,ヤング係数は 210GPa とする。
7. 図 1 に示すような柱状図が得られているとする。

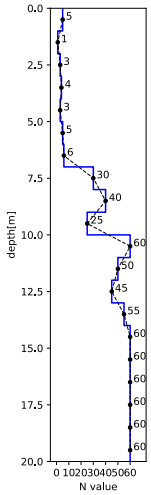
3,4 に関し，継手が 1 箇所までであることから，杭の全長は自動的に 1.5m $\leq l \leq$ 12m に制限される。5 に関し，断面積 A および断面係数 Z は径 B と板厚 t により従属的に決定される。7 に関し，同一層内では N 値は一定とする。

表 1　基礎杭に作用する軸力

荷重ケース	杭番号 e	1	2	3	4	5	6
1	N_L[kN]	270	520	260	280	480	250
	N_E[kN]	250	250	250	-250	-250	-250
2	N_L[kN]	170	330	180	140	270	190
	N_E[kN]	150	250	150	-150	-250	-150

表 2　杭断面リスト

x	符号	B[mm]	t[mm]	A_p[mm^2]	D_w[mm]	A[mm^2]	Z[mm^3]
1	A	114.3	4.5	51400	256.9	1552	41001
2	B	114.3	6	51400	256.9	2041	52530
3	C	139.8	4.5	78000	314.7	1913	62686
4	D	139.8	6.6	78000	314.7	2762	87842
5	E	165.2	5	108900	372.3	2516	97827
6	F	165.2	7.1	108900	372.3	3526	133662
7	G	190.7	5.3	156200	446.0	3087	139219
8	H	190.7	7	156200	446.0	4040	178976
9	I	216.3	8.2	199300	503.7	5361	268743
10	J	216.3	10.3	199300	503.7	6666	327761
11	K	216.3	12.7	199300	503.7	8123	390712
12	L	267.4	8	288400	606.0	6519	410527
13	M	267.4	9.3	288400	606.0	7541	470261
14	N	267.4	12.7	288400	606.0	10162	617871
15	O	318.5	10.3	405800	729.9	9973	744390
16	P	318.5	12.7	405800	729.9	12201	897109
17	Q	355.6	9.5	422800	745.0	10329	870530
18	R	355.6	12.7	422800	745.0	13681	1132478
19	S	400.0	9.0	510500	818.6	11055	1056897
20	T	400.0	12.0	510500	818.6	14627	1377595
21	U	406.4	9.5	510500	818.6	11846	1148555
22	V	406.4	12.7	510500	818.6	15708	1499298



層厚 [m]	N 値	土質
1	5	砂質
1	1	砂質
1	3	砂質
1	4	粘性
1	3	粘性
1	5	砂質
1	6	砂質
1	30	砂質
1	40	砂質
1	25	砂質
1	60	粘性
1	50	粘性
1	45	粘性
1	55	粘性
1	60	粘性
1	60	粘性
1	60	粘性
1	60	粘性
1	60	粘性
1	60	粘性

図 1　柱状図データ

また，杭頭レベルは 6 か所すべて同一とし，深度は杭頭レベルを 0.0m として原点にとる。

解析プログラムは Python で記述し，最適化アルゴリズムは Mixed Integer Distributed Ant Colony Optimization(以下，MIDACO)[2] とし，ソルバーには pyOpt[3] を用いる。

図 2,3 にそれぞれの軸力ケースにおける最適解の杭符号と応力状態を示す。1〜6 の全ての杭の応力は許容応力度以下となっていることが確認できる。いずれのケースも，6 本の杭は全て同じ断面，杭長が選択される結果となった。今回のケースでは，総本数が 6 本と少ないため，杭径，杭長をむやみにバラバラにすると剛性の高い杭にせん断力が集中し設計できなくなるためと考えられる。

5 結論

基礎杭の最適設計手法を考案し，鋼管杭を対象として

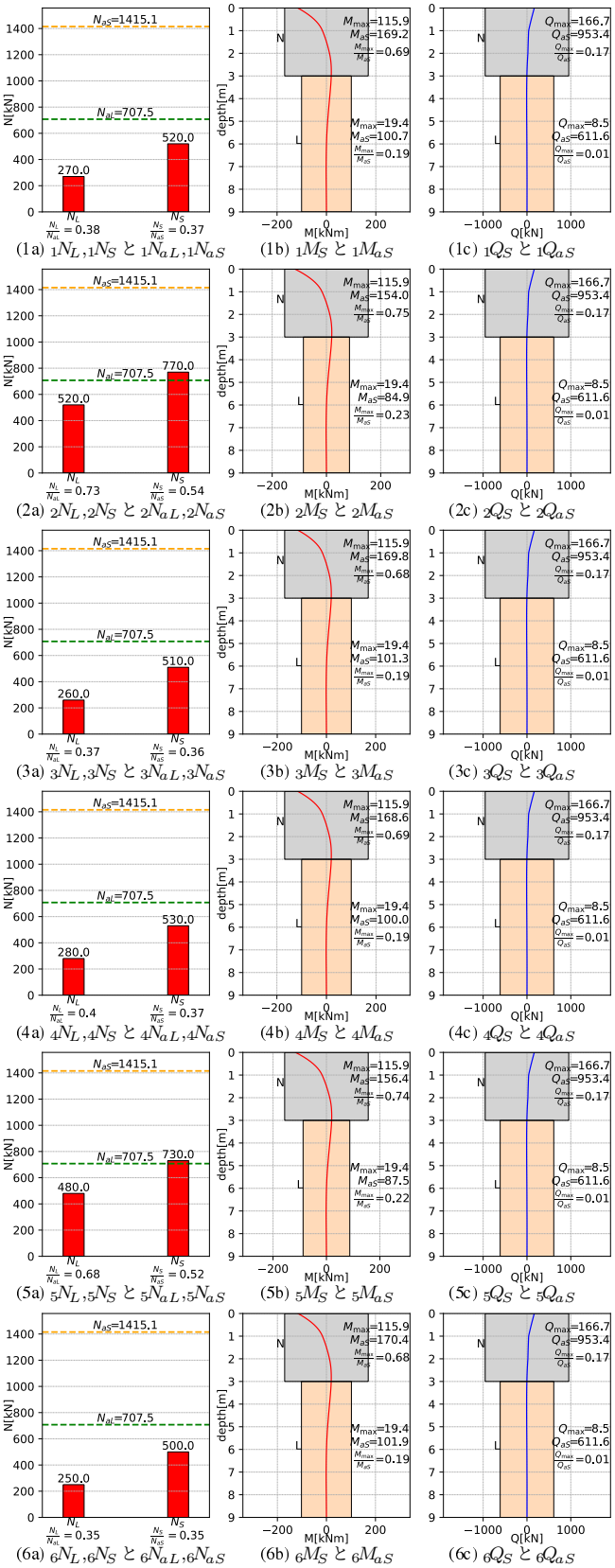


図 2　荷重ケース 1 の最適解における杭の応力状態

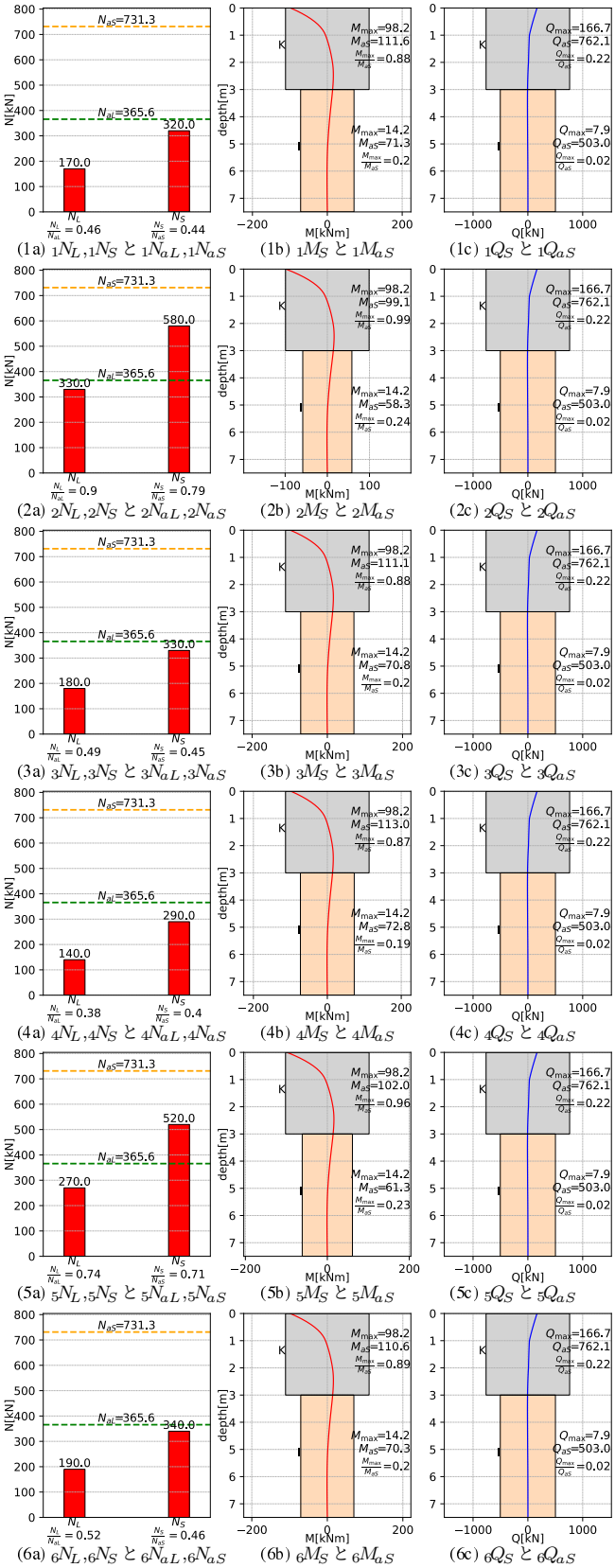


図 3　荷重ケース 2 の最適解における杭の応力状態

同手法を適用した。今回は取り扱わなかったが，今後は地盤の不陸などの不確定性を考慮した定式化を行う予定である。

[参考文献]

1) E.C. Pestel and F.A. Leckie: Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill Inc.,US, 1963

2) M Schlueter, SO Erb, M Gerdts, S Kemble, and JJ Ruckmann: MIDACO on MINLP space applications, Advances in Space Research, **51**, (7), pp. 1116–1131, 2013

3) R. E. Perez, P. W. Jansen, and J. R. R. A. Martins: pyOpt: A Python-based object-oriented framework for nonlinear constrained optimization, Struct. Multidisc. Optim., **45**, pp. 101–118, 2012

*1 北九州市立大学 国際環境工学部 建築デザイン学科 講師 博士 (工学)