

部材長に上限値を設けたトラスのトポロジー最適化

寒野 善博

キーワード：トポロジー最適化 ロバスト最適化 DC アルゴリズム 相補性制約

1. はじめに

トラスのトポロジー最適化では、いわゆるグラント・ストラクチャ法が広く用いられている。この方法では、まず、初期設定としてトラスの節点の位置、境界条件、部材の候補を与える(この初期設定を、グラント・ストラクチャとよぶ)。そして、その部材の候補の断面積を決定変数(設計変数)として最適化を実行し、断面積が0になった候補は取り除く。

最適化の結果として得られたトラスが非常に長い部材を含むことは、実用上の観点からは望ましくない。しかし、グラント・ストラクチャ法において、得られる解の部材の長さに上限値を設けることは実はそれほど容易ではない。このことを、具体的な例を使って説明する。

図1のような初期設定から、コンプライアンス(構造物の柔性的指標の一つ)を最小化すると、図2のような解が得られる。この解には、直線状に並ぶ部材で、かつ、他の方向の部材とは接続しないような部材の集合が、いくつか存在する。このような部材の集合は鎖(chain)とよばれる¹⁾が、コンプライアンス最小化問題では鎖を一本の長い部材

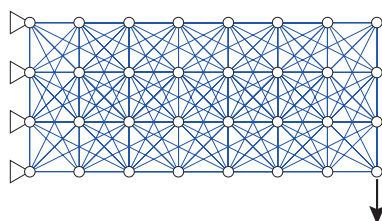


図1 初期設定(グラント・ストラクチャ)の例

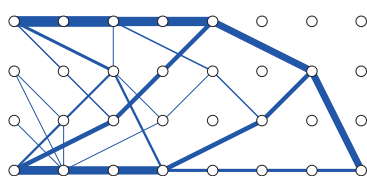


図2 図1から得られる最適解

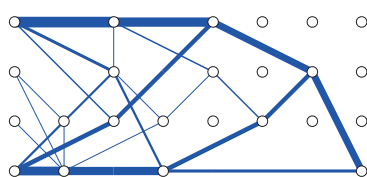


図3 図2の解からヒンジを除去した状態

と置き換えても最適性と実行可能性は変わらない。このように、鎖の中間節点を除去する手続きは、ヒンジ除去(hinge cancellation)とよばれる^{1,23)}。図2の解からヒンジ除去を行うと、図3に示す解が得られる。ヒンジ除去は、図2のような不安定なトラスを図3のような安定なトラスに変換するために行われる。その結果、初期設定のトラスにおける最長の部材よりも長い部材を含む解がしばしば得られる。

トラスのトポロジー最適化では、最適化の過程で部材の接続関係が変化するため、どこに鎖が現れるかを予想することは難しい。このことから、鎖の長さに制約を設けることは容易ではない。Mela¹⁹⁾は、各部材の断面積をあらかじめ与えられた候補から選択するという問題設定の下で、個材座屈を防ぐ制約が混合整数線形計画の枠組みで定式化できることを明らかにした。これは、鎖の長さの上限値に関する制約の一つの例と言える。ただし、この定式化は部材断面積が離散値をとる場合に限られ、一般性には欠ける。また、この定式化はRasmussen and Stolpe²²⁾やStolpe and Svanberg²⁴⁾による混合整数線形計画の定式化を基礎としているが、これらはいわゆるbig-Mとよばれる大きな定数を用いているため、大規模な問題に適用することは難しい¹²⁾。

本稿では、重なり合う部材を含んだグラント・ストラクチャ^{14,15)}を用い、節点に作用する外力の不確かさに対するロバスト性を考慮したコンプライアンス最小化問題を解くことで、部材の長さが指定値以下である設計解が得られることを説明する。また、中規模の問題に対しても適用可能な解法の一つとして、DCアルゴリズムを用いた発見的解法を概説する。

2. 不確実な外力に対するコンプライアンス最小化

構造物に作用する外力を正確に予測することは不可能であるため、高い性能をもつ構造物を設計するためには外力に対するロバスト性を保証することは避けて通れない。このため、不確実な外力に対するコンプライアンス最小化問題には多くの研究がある^{5,9,11,25)}。この問題は、外力がとり得る値の集合(不確実性集合)を指定し、コンプライアンスの最大値を最小化するという形のロバスト最適化問題として表現される。

Ben-Tal and Nemirovski⁴⁾は、トラスのロバスト最適化問題が半正定値計画問題²⁾に帰着できることを示した。ただし、この定式化では、不確実な外力が作用する節点を予め指

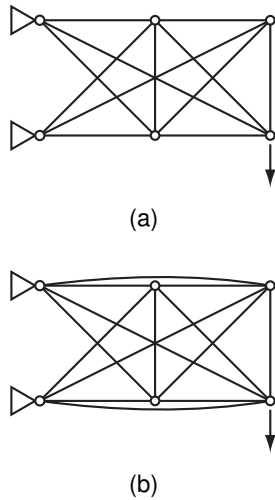


図 4 初期設定 (グランド・ストラクチャ) が重複部材を (a) 含まない場合と, (b) 含む場合

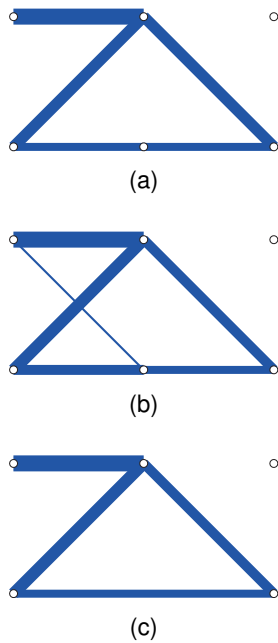


図 5 (a) 図 4a で外力の不確実を考慮しない場合の最適解, (b) 図 4a から得られるロバスト最適解と (c) 図 4b から得られるロバスト最適解

定する必要がある。しかし、最適解がどの節点をもつかを予想することは一般には非常に困難である。このため、解における各節点の有無を 0-1 変数で表現した定式化 (混合整数半正定値計画問題) が提案された²⁶⁾。

図 4a に示す初期設定に対して、外力の不確実を考慮しないコンプライアンス最小化問題では、図 5a に示す解が最適解として得られる。次に、文献²⁶⁾の手法で得られるロバスト最適解は図 5b に示すものである。ここで、部材が一つ追加されることにより、図 5a の鎖が安定化されていることが分かる。しかし、実は、図 5c のように中間節点を取り除いて長い部材を用いれば、より目的関数の値が小さい解が得られる。この長い部材は図 4a に含まれていないため、文献²⁶⁾

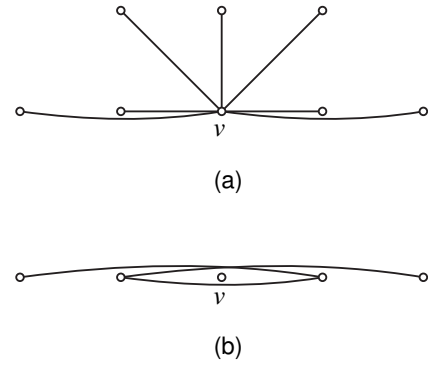


図 6 節点 v に対する (a) $N(v)$ と (b) $A(v)$ の定義

の定式化ではこのような解を得ることはできない。

3 重複部材を含むグランド・ストラクチャを用いた定式化

前節で述べたように、トラスのロバスト最適化では、図 4a のような初期設定を用いると図 5c のような解が排除されてしまう。このため、図 4b のように、重複部材を含む初期設定を用いる必要がある。ところが、最終的な解が重複部材をもつことは実用的な観点から許容されない。そこで、重複部材が同時には存在してはならないという制約を付加する必要がある。

以下では、トラスの部材 e の断面積を x_e で表す。また、節点 v に対して 0-1 変数 s_v を割り当て、 v が存在するときに $s_v = 1$ 、消失したときに $s_v = 0$ とする。図 6a のように v に接続する部材の番号の集合を $N(v)$ とおき、変数 n_v を

$$n_v = \sum_{e \in N(v)} x_e$$

で定める。節点 v が消失した場合はそれに接続する部材も消失する必要があるため、条件

$$(1 - s_v)n_v = 0 \quad (1)$$

が成り立つべきである。次に、図 6b のように節点 v をまたぐ部材の番号の集合を $A(v)$ とおき、変数 a_v を

$$a_v = \sum_{e \in A(v)} x_e$$

で定める。節点 v が存在する場合はそれをまたぐ部材も消失する必要があるため、条件

$$s_v a_v = 0 \quad (2)$$

が成り立つべきである。制約 (1) および (2) を文献²⁶⁾の定式化に組み込むと、トラスのロバスト最適化問題は相補性制約付き半正定値計画として定式化される¹³⁾。

ここで、重複部材を含むグラウンド・ストラクチャに含まれる部材の長さに上限値を設けることにする．すると、以上の定式化を用いて得られる解は、その上限値よりも長い部材をもたない．これは、存在する節点すべてに対して不確実な外力が作用し得るというモデルを用いたトラスのロバスト最適化では、鎖を含む解は実行不可能であるからである．なお、本稿ではコンプライアンス最小化問題を前提として議論しているが、他の目的関数や制約を考慮することも可能である．その場合は、十分に大きな定数に対してコンプライアンスの最大値がこれを超えないという制約として扱えば、他の目的関数や制約に影響を与えることなく部材の長さに上限値を設けることができる．

4 DC アルゴリズムに基づく発見的解法

3 節で述べた相補性制約付き半正定値計画は、形式的には次のように書くことができる：

$$\text{Minimize } f(\xi, y, z) \quad (3a)$$

$$\text{subject to } (\xi, y, z) \in \Omega, \quad (3b)$$

$$y \geq 0, z \geq 0, y^T z = 0. \quad (3c)$$

ただし、 $f: \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数であり、 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ は凸集合である．ここで Jara-Moroni *et al.* ⁽¹⁰⁾ と同様に考えると、問題 (3) は、十分大きなペナルティ・パラメーター $\rho > 0$ を用いて次のように書き直すことができる：

$$\text{Minimize } (f(\xi, y, z) + \rho \|y + z\|_2^2) - \rho \|y - z\|_2^2 \quad (4a)$$

$$\text{subject to } (\xi, y, z) \in \Omega, y \geq 0, z \geq 0. \quad (4b)$$

(4a) は二つの凸関数の差で表されているので、問題 (4) は DC 計画 (difference-of-convex programming) 問題 ^(16,21) である．DC 計画問題の局所最適解を得る手法として DC アルゴリズム (または、CCCP) ⁽¹⁷⁾ がよく知られており、近年では

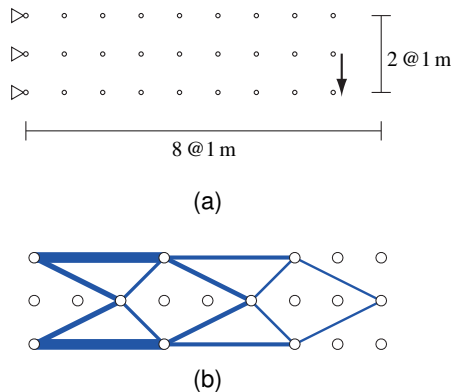


図7 数値実験の例題．(a) 問題設定と (b) 提案手法による解

機械学習の分野に現れる最適化問題の発見的解法として広く用いられている ^(6-8,20)．

DC アルゴリズムを問題 (4) に適用した場合には、(4a) における関数 $-\rho \|y - z\|_2^2$ を 1 次近似して得られる凸最適化問題を部分問題として解くことになる．トラスのロバスト最適化では、この部分問題は半正定値計画に帰着できるため主双対内点法 ⁽²⁾ を用いて容易に解くことができる．

本稿で扱った最適設計問題は、問題の規模が小さい場合には分枝限定法を用いて大域解を得ることも可能である．たとえば図 5c は提案手法で得られた解であるが、分枝限定法 (YALMIP ⁽¹⁸⁾) でも同じ解が得られることを確認した．ただし、提案手法で得られる解は必ずしも大域的最適解であるとは限らない．

提案手法は、中規模の問題にも適用可能である ⁽¹³⁾．図 7 は、その一例を示している．ただし、図 7a では、長さが 3 m を超えない重複部材をすべて考慮している．図 7b の解には、この上限値を超える長さの部材は含まれていないことが確認できる．

参考文献

- 1) W. Achtziger: Local stability of trusses in the context of topology optimization. Part I: Exact modelling. *Structural Optimization*, **17**, 235–246 (1999).
- 2) M. F. Anjos, J. B. Lasserre (eds.): *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*. Springer, New York (2012).
- 3) A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, A. Nemirovski: *Robust Optimization*. Princeton University Press, Princeton (2009).
- 4) A. Ben-Tal, A. Nemirovski: Robust truss topology optimization via semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, **7**, 991–1016 (1997).
- 5) E. Cherkaev, A. Cherkaev: Principal compliance and robust optimal design. *Journal of Elasticity*, **72**, 71–98, 2003.
- 6) R. Collobert, F. Sinz, J. Weston, L. Bottou: Large scale transductive SVMs. *Journal of Machine Learning Research*, **7**, 1687–1712 (2006).
- 7) G. Fung, O. L. Mangasarian: Semi-supervised support vector machines for unlabeled data classification. *Optimization Methods and Software*, **15**, 29–44 (2001).
- 8) J. Gotoh, A. Takeda, K. Tono: DC formulations and algorithms for sparse optimization problems. *Mathematical Programming*, **169**, 141–176 (2018).
- 9) E. Holmberg, C.-J. Thore, A. Klarbring: Worst-case topology optimization of self-weight loaded structures using semi-definite programming. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **52**, 915–928 (2015).

- 10) F. Jara-Moroni, J.-S. Pang, A. Wächter: A study of the difference-of-convex approach for solving linear programs with complementarity constraints. *Mathematical Programming*, **169**, 221–254 (2018).
- 11) Y. Kanno: A note on formulations of robust compliance optimization under uncertain loads. 日本建築学会構造系論文集, **80**, 601–607 (2015).
- 12) Y. Kanno: Global optimization of trusses with constraints on number of different cross-sections: A mixed-integer second-order cone programming approach. *Computational Optimization and Applications*, **63**, 203–236 (2016).
- 13) Y. Kanno: Robust truss topology optimization via semidefinite programming with complementarity constraints: A difference-of-convex programming approach. *Computational Optimization and Applications*, to appear. DOI : 10.1007/s10589-018-0013-3
- 14) Y. Kanno, S. Fujita: Alternating direction method of multipliers for truss topology optimization with limited number of nodes: A cardinality-constrained second-order cone programming approach. *Optimization and Engineering*, **19**, 327–358 (2018).
- 15) Y. Kanno, H. Yamada: A note on truss topology optimization under self-weight load: Mixed-integer second-order cone programming approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **56**, 221–226 (2017).
- 16) H. A. Le Thi, T. Pham Dinh: The DC (difference of convex functions) programming and DCA revisited with DC models of real world nonconvex optimization problems. *Annals of Operations Research*, **133**, 23–46 (2005).
- 17) T. Lipp, S. Boyd: Variations and extension of the convex–concave procedure. *Optimization and Engineering*, **17**, 263–287 (2016).
- 18) J. Löfberg: YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *2004 IEEE International Conference on Computer Aided Control System Design*, Taipei, pp. 284–289 (2004).
- 19) K. Mela: Resolving issues with member buckling in truss topology optimization using a mixed variable approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **50**, 1037–1049 (2014).
- 20) J. Neumann, C. Schnörr, G. Steidl: Combined SVM-based feature selection and classification. *Machine Learning*, **61**, 129–150 (2005).
- 21) T. Pham Dinh, H. A. Le Thi: Recent advances in DC Programming and DCA. In: N. T. Nguyen, H. A. Le Thi (eds.), *Transactions on Computational Intelligence XIII*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 1–37 (2014).
- 22) M. H. Rasmussen, M. Stolpe: Global optimization of discrete truss topology design problems using a parallel cut-and-branch method. *Computers and Structures*, **86**, 1527–1538 (2008).
- 23) G. I. N. Rozvany: Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints. *Structural Optimization*, **11**, 213–217 (1996).
- 24) M. Stolpe, K. Svanberg: Modelling topology optimization problems as linear mixed 0-1 programs. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **57**, 723–739 (2003).
- 25) A. Takezawa, S. Nii, M. Kitamura, N. Kogiso: Topology optimization for worst load conditions based on the eigenvalue analysis of an aggregated linear system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **200**, 2268–2281 (2011).
- 26) K. Yonekura, Y. Kanno: Global optimization of robust truss topology via mixed integer semidefinite programming. *Optimization and Engineering*, **11**, 355–379 (2010).