

切頂八面体に基づく柔軟な空間充填立体を剛にする手法

○小林 祐貴^{*1} 奈良 知恵^{*2}

キーワード：Panel-hinge フレームワーク 形態生成 連続折り畳み

1. はじめに

本稿では多面体を剛なパネルがヒンジによって接続された panel-hinge フレームワークによって構成されていると考える。

ここで、切頂八面体の1つの六角形を xy 平面に平行となるように配置し、空間充填した立体 P を考える (図 1(a)). このとき、 xy 平面に平行ではない6つの六角形を P から取り除いてできる面の集合 Q について考える (図 1(b)).

Q を面が重ならないように空間充填すると連続な立体となり、この立体を T とする (図 2).

奈良⁴⁾はこれまでに、 T は平坦に折り畳むことができる立体であることを発表した。

Q の底面の1つの六角形に着目した時、六角形に接続する3つの四角形を一つの組とし、さらに六角形の高さが異なる3つの組を単位とする (図 3(a)). 図 3(a) を平面的に敷き詰めることで、図 3(b) を得ることができる。さらに図 3(b) を重ねることで図 3(c) となり、この立体は端部を除いて図 2 と同様な立体である。ここで、図 4 は図 3(b) の展開図であり、一枚の紙から作ることができる。

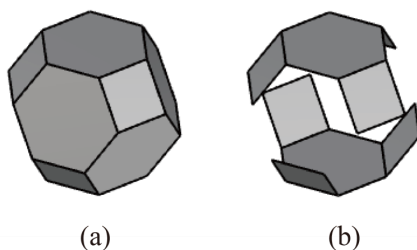


図 1 (a) 1つの六角形の面を xy 平面に平行に配置した切頂八面体 (b) (a) から xy 平面に平行ではない六角形の面をのぞいた面の集合

本稿では、このようにして作成することができる立体に対して切頂八面体を追加し、剛にする方法を述べる。

2. Panel-Hinge フレームワークの剛性

以下の panel-hinge フレームワークの剛性行列の定義は文献³⁾に従う。

パネルの合同変換は同次座標系を用いることで、平行移動と回転を共に含んだ 4×4 の行列 M で表すことができ

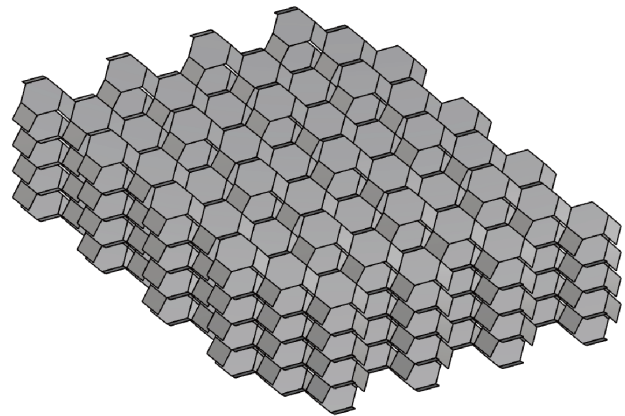


図 2 図 1(b) を空間充填してできる立体

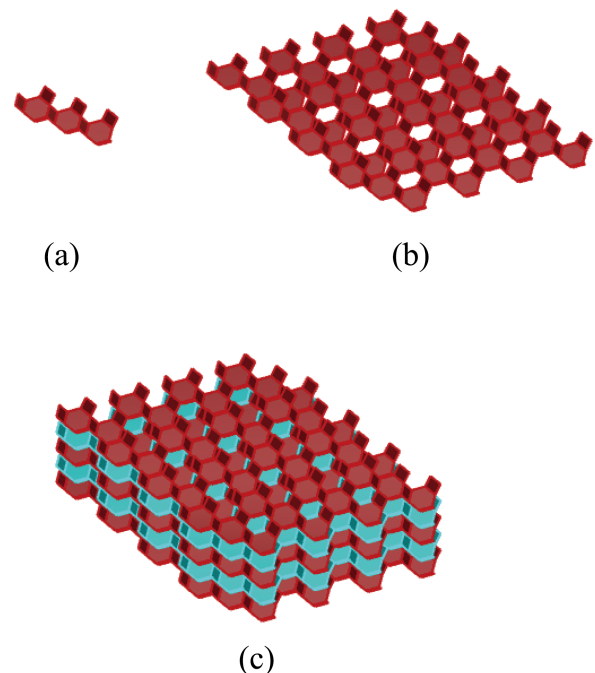


図 3 (a) 六角形と四角形の面の集合 (b) (a) を敷き詰めることでできる立体 (c) (b) を重ねてできる図 2 と同様の立体

る。ここで、2つのパネル B , B' がヒンジ H によって接続されているとし、 H の両端点の同次座標を $\mathbf{p}_1 = (p_1, x,$

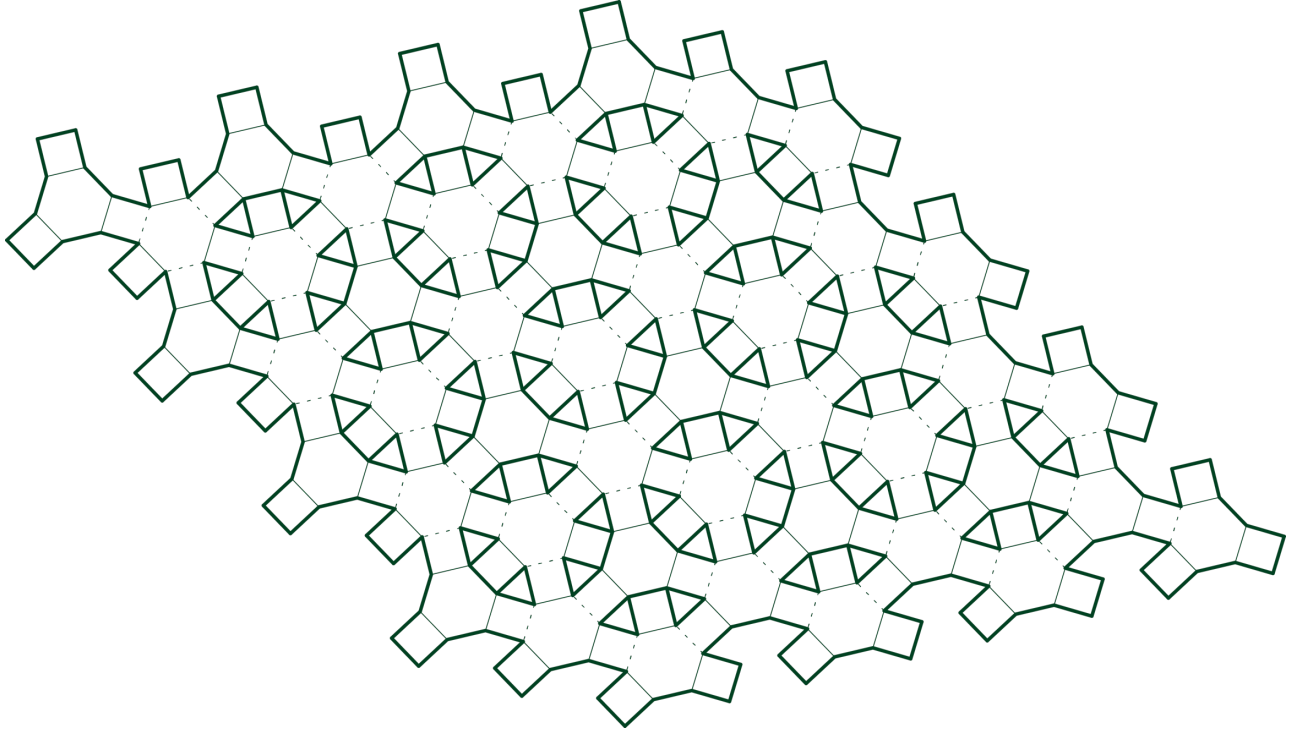


図 4 展開図 (太線は切取, 細線は谷折, 破線は山折)

$p_{1,y}, p_{1,z}, 1), \mathbf{p}_2 = (p_{2,x}, p_{2,y}, p_{2,z}, 1)$ とする. そして, パネルの動きを表す行列 M, M' がそれぞれ B, B' に与えられているとする. このとき, ヒンジによる制約は $M\mathbf{p}_1 = M'\mathbf{p}_1, M\mathbf{p}_2 = M'\mathbf{p}_2$ と表すことができる. この等式を微分して, 以下の式が得られる.

$$I\mathbf{p}_i = I'\mathbf{p}_i \quad \text{for } i = 1, 2 \quad (1)$$

I および I' は B, B' に割り当てられた無限小動きとみなすことができる. $I = \begin{pmatrix} R & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とあらわすことができる

と知られている. ここで R は $R = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$, v

$= (v_x, v_y, v_z)$ である. 同様に I' も $\begin{pmatrix} R' & v' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と表すことができる. これらを (1) に代入して整理すると以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{vmatrix} \omega_y - \omega'_y & \omega_z - \omega'_z \\ p_{1,y} & p_{1,z} \end{vmatrix} + v_x - v'_x, \begin{vmatrix} \omega_z - \omega'_z & \omega_x - \omega'_x \\ p_{1,z} & p_{1,x} \end{vmatrix} + v_y - v'_y, \right. \\ & \left. \begin{vmatrix} \omega_x - \omega'_x & \omega_y - \omega'_y \\ p_{1,x} & p_{1,y} \end{vmatrix} + v_z - v'_z, \begin{vmatrix} \omega_y - \omega'_y & \omega_z - \omega'_z \\ p_{1,y} - p_{2,y} & p_{1,z} - p_{2,z} \end{vmatrix} \right. \\ & \left. \begin{vmatrix} \omega_z - \omega'_z & \omega_x - \omega'_x \\ p_{1,z} - p_{2,z} & p_{1,x} - p_{2,x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \omega_x - \omega'_x & \omega_y - \omega'_y \\ p_{1,x} - p_{2,x} & p_{1,y} - p_{2,y} \end{vmatrix} \right) = 0 \end{aligned}$$

このことより, 次の等式をみたす t が存在する.

$$(\omega - \omega', v - v') = t \left(\begin{vmatrix} p_{1,x} & 1 \\ p_{2,x} & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} p_{1,y} & 1 \\ p_{2,y} & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_{1,z} & 1 \\ p_{2,z} & 1 \end{vmatrix}, \right. \\ \left. \begin{vmatrix} p_{1,y} & p_{1,z} \\ p_{2,y} & p_{2,z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_{1,z} & p_{1,x} \\ p_{2,z} & p_{2,x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_{1,x} & p_{1,y} \\ p_{2,x} & p_{2,y} \end{vmatrix} \right) \quad (2)$$

(2) の左辺はヒンジでつながれた両側の剛体の無限小動きを表わしており, 右辺の 6 次元ベクトルはヒンジによる制約を表している.

ここで, panel-hinge フレームワーク $(G, \mathbf{p})$ を, グラフ $G = (V, E)$ と各辺 $e \in E$ の $\mathbf{p}(e)$ に関する埋込み $\mathbf{p}$ の組とする. $\mathbf{p}(e)$ は e に対応するヒンジの埋込みとする. 無限小動きの定義より, すべての $e = uv \in E$ について, 以下の等式を満たす無限小動きに直交するベクトル $r_i(\mathbf{p}(e))$ ($1 \leq i \leq 5$) をとることができる, 以下の式が成り立つ.

$$(S(u) \cdot S(v)) \cdot r_i(\mathbf{p}(e)) = 0$$

このとき S を $(G, \mathbf{p})$ の無限小動きとよぶ. (1) 式の無限小動きは $5|E|$ 個の等式で記述され, $5|E| \times 6|V|$ の行列 $R(G, \mathbf{p})$ を

$$R(G, \mathbf{p}) =_{e=uv} \begin{pmatrix} \cdots & u & \cdots & v & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots 0 \cdots & r(\mathbf{p}(e)) & \cdots 0 \cdots & -r(\mathbf{p}(e)) & \cdots 0 \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

とする. ここで, $r(\mathbf{p}(e))$ は 5×6 の行列である. $R(G, \mathbf{p})$ を剛性行列と呼び, $R(G, \mathbf{p})$ のランクが $6(|V| - 1)$ と等しい場合, そのフレームワークは剛であることが知られ

ている²⁾. $R(G, \mathbf{p})$ が、すべての部分グラフにおいて最大のランクをもつとき、そのフレームワークは一般的であるという.

3. 切頂八面体に基づく柔軟な空間充填立体の自由度

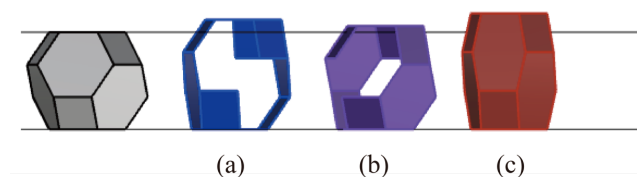


図 5 切頂八面体と高さが異なる 3 つの立体

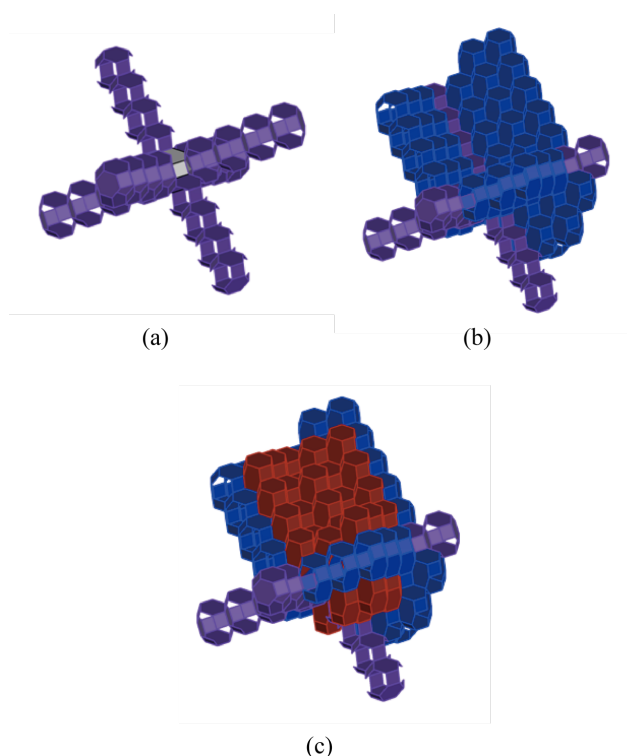


図 6 切頂八面体と 3 つの立体による空間充填

定理 1 切頂八面体に基づく柔軟な空間充填立体を T とする. このとき, T には 2 以上の自由度がある.

証明: 切頂八面体に基づく柔軟な空間充填立体が平坦に折りたたみ可能であることから自由度が 1 あることはわかる.

ここで, 立体に対して切頂立方体を一つ追加した場合を考える. 一つの切頂立方体を追加することで, 面同士の接続関係を変えることなく異なる実現例が存在しなければ, 立体の自由度は 1 のみとなる.

ここで面を含んだ, それぞれ上面の高さが異なる 3 つの立体を考える (図 5). 図 5(a) の立体は, 切頂八面体の上

面と底面を除く六角形の面の方向に対して充填する (図 6(a)). 図 5(b) の立体は, 図 5(b) の立体によってできる軸

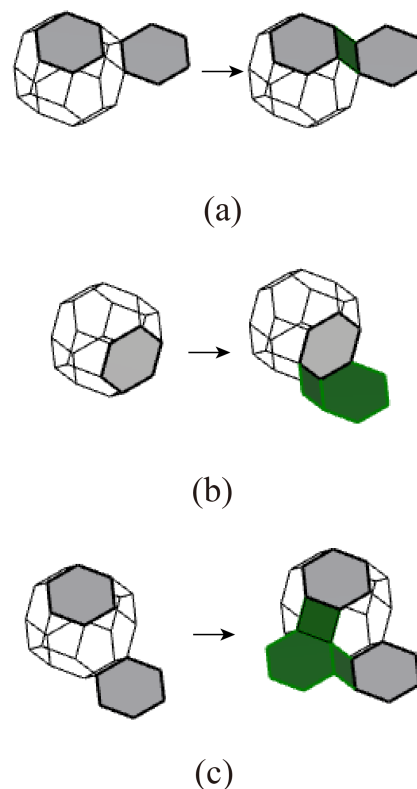


図 7 (a) 操作 1 (b) 操作 2 (c) 操作 3

の間を充填する (図 6(b)). 図 5(c) の立体は, 図 6(a), (b) の立体によって分割された空間に対して充填することができる (図 6(c)).

このように, 立体に対して切頂立方体を一つ追加した場合に, 面同士の接続関係を変えることなく異なる実現例が存在し, 立体の自由度は 2 以上である.

以下の 3 つの操作によって剛な面を作ることができる.

操作 1 剛な六角形 2 枚に対して, 四角形 1 枚を追加する (図 7(a)).

操作 2 剛な六角形に対して, 互いにヒンジでつながれた六角形 1 枚と四角形 1 枚を追加する (図 7(b)).

操作 3 剛な六角形 2 枚に対して, ヒンジでつながれた六角形 1 枚と四角形 2 枚を追加する (図 7(c)).

このとき, 以下の補題を示すことができる.

補題 1 剛なフレームワークに対して, 操作 1, 2, 3 のいずれの操作を行った場合においても, 操作後のフレームワー

クもまた剛である。

補題 1 は、各操作について剛性行列を考え、証明することができる。証明方法は文献³⁾と同様であり、本稿では省略する。

4. 剛体を追加することで剛になる範囲

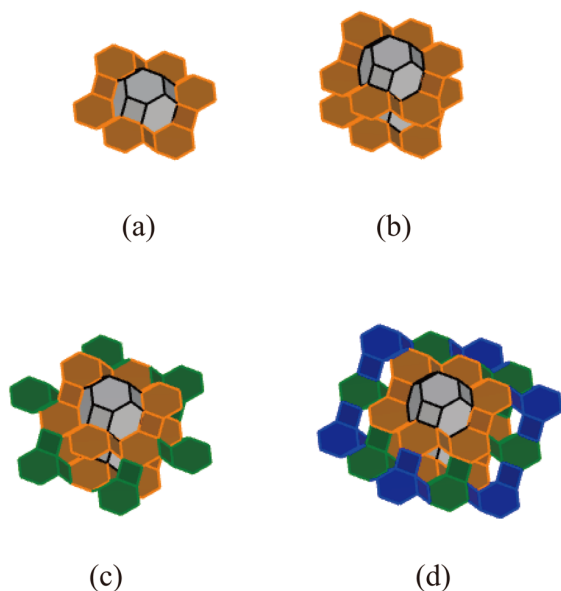


図 8 (a) 1 個の切頂八面体を追加した場合に切頂八面体に隣接して剛になる面 (b) 2 個の切頂八面体を追加した場合に切頂八面体に隣接して剛になる面 (c) 橙色の剛な面に隣接することで剛になる緑色の面 (d) 緑色の剛な面に隣接することで剛になる青色の面

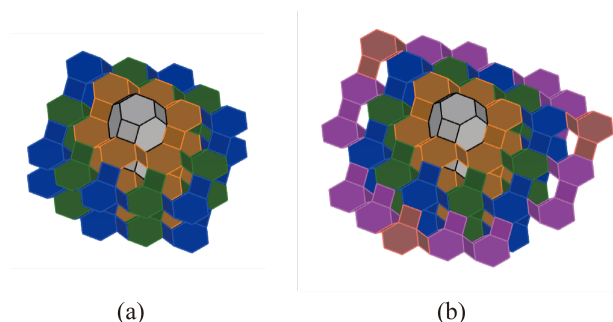


図 9 3 個の切頂八面体を追加した場合に剛となる面

1 個の切頂八面体を追加した場合、操作 1 を 6 回繰り返すことで、補題 1 より、剛な切頂八面体に隣接する 12 枚の面が剛になる (図 8(a))。

2 個の切頂八面体を追加した場合も、まずは 1 個の場合と同様に、操作 1 を 6 回繰り返すことで、補題 1 より、剛な切頂八面体に隣接する 12 枚の面が剛になる (図 8(b))。次に、操作 2 を 6 回繰り返すことで、補題 1 より新たに 12 枚の面が剛になる (図 8(c))。この時、さらに操作 2 を 6 回繰り返すことができ、合わせて操作 1 も 6 回行うこと

ができる。この結果、2 個の切頂八面体を追加した場合、補題 1 より合計で新たに 42 枚の面が剛になる。

3 個の切頂八面体を追加した場合も、まずは 2 個の場合と同様に、補題 1 より 42 枚の面が剛になる。さらに、操作 2 を 12 回、操作 1 を 6 回行うことができる。その後、操作 2 を 3 回、操作 1 を 3 回行うことができる。この結果、2 個の切頂八面体を追加した場合、合計で新たに 81 枚の面が剛になる (図 9(b))。

このように柱状に切頂八面体を追加していくことによって、剛となる領域を増やしていくことができる。

5. まとめ

今後は 4 章で述べた事実を元に、無限長の柱を追加することで、立体の有限の範囲が剛となることを証明する。さらに、建築分野において有用な利用方法について検討する。

謝辞：本研究は、JSPS 科研費 JP17K12868, JP16K05258 の助成を受けたものです。

[参考文献]

- 1) B. Jackson and T. Jordán: “The generic rank of body-bar-and-hinge frameworks”, *European Journal of Combinatorics*, 31(2):574-588, 2009.
- 2) N. Katoh, S. Tanigawa: “A proof of the molecular conjecture”, *Discrete & Computational Geometry*, 45:647-700, 2011.
- 3) Y. Kobayashi, N. Katoh, T. Okano, and A. Takizawa: “An inductive construction of rigid panel-hinge graphs and their applications to form design”, *The International Journal of Architectural Computing*, 13(1):45-63, 2015.
- 4) 奈良知恵: “形状シフトモデルから空間分割膜へ”, 第 23 回折り紙の科学・数学・教育 研究集会, JOAS ホール, 12 月 16 日, 2017.

*1 大阪市立大学大学院 工学研究科 講師

*2 明治大学 研究・知財戦略機構 客員教授