群論由来の多面体構造を基にした射影形状の構造への適用

○前　　稔文*1　小林　竜一*2
藤本　教寛*3

キーワード：群論　多面体　座標回転　射影　建築構造　骨組解析

1．はじめに

群論は代数構造の基礎となる数学であり，数学の 1 分野として留まらず幾何学や解析学など，他の数学分野にまで幅広く波及している[1)]．また，群論は現代物理学にも多大な影響力を持っており，宇宙の初期を記述すると期待されている超弦理論や大統一理論[2)]，人類が到達しているエネルギーまでの物理現象を正しく記述する素粒子標準模型などにおいては，群論が対称性や保存量など宇宙の根幹の構造に深く関与する．特に，究極の理論の候補として精力的に研究が進められている”超弦理論”からは，例外型単純リー群の中で最大である E8 群の存在が示唆されており，安定的に存在している宇宙の創生に関わる謎に，群論や対称性の高い E8 群などが関わっていることは非常に興味深いことである．このように現代物理学と群論は深い関係にあり，宇宙の構造を群論が決めていると言っても過言ではない．

これら群論の中で，「コクセター群」では群構造の本質を多胞体として描写する「コクセタープレーン」が存在し，超弦理論から示唆される E8 群などを，コクセタープレーンにより投射した図が存在する．これら宇宙構造と関係が深い群について，本質を表した多胞体から得られる構造を建築形態に応用し，形状的合理性あるいは構造的安定性といった視点から群論由来の安定形状を示すことが本研究の最終目的である．

その第一段階として，コクセタープレーンに見られるような高次元多胞体の 2 次元平面射影を参考に，まずは 3 次元空間多胞体である多面体，特に対称性が高く自然界に 5 つしか存在しないことが証明されている正多面体に対して，三次元座標軸上で回転させた各頂点の座標を 2 次元平面に射影し，正多面体の隣り合う頂点同士を直線で結んだ図の生成を行った．さらに，生成した図を建築骨組として適用し，それらに荷重を作用させた場合の骨組解析を通じて，構造的な強度の観点から形状的安定性について検討した．

2．図形の生成

本研究では，5 つしか存在しない正多面体（面数 n = 4, 6, 8, 12, 20）を扱うこととした．それらの図形を回転させるが，回転前の座標を(x, y, z)，回転後の座標を(x', y', z')とし，図-1 に示すように，X 軸周りに a°，Y 軸周りに b°反時計回りに回転させ，Z 軸方向から図形の各頂点を射影し，基本図形に倣って頂点を直線で結ぶ．ここで，回転させる座標軸は図形の中心に位置し，回転角は X 軸および Y 軸周りともに 0°，30°，45°，60°，90°として，それぞれ組み合わせて回転させた．なお，Z 軸周りは，回転させても射影図の形状に変化がないため，回転角は 0°とした．このように設定し，射影された正多面体の各頂点の座標を下式より求めた．

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos b & \sin a \sin b & \cos a \sin b \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ -\sin b & \sin a \cos b & \cos a \cos b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{1}$$

図-2 から図-6 に，生成した各図形の射影図を示す．図-2 の正四面体については，図形の頂点数が 4 であるため，投射された図は三角形もしくは四角形となった．また，各図における頂点の位置は様々で，頂点および頂点を結ぶ辺が重なる図形も見られた．

図-3 に示す正六面体については，いずれの軸に対しても対称であることから，回転角 a，b のいずれかが 0°または 90°の図形は，生成された図形が正方形あるいは長方形となるものが多く，矩形以外の図形は六角形となることが確認できた．

正八面体の射影図を図-4 に示すが，正八面体は面数に対して頂点の数は 6 と少なく，投射された図は四角形もしくは六角形となった．なお，四角形のうち，ほとんどが平行四辺形であり，一部，正方形の射影図であることが確認できた．

図-5 に正十二面体の射影図を示す．正十二面体は，辺 30 本，頂点 20 個と正多面体の中で最も多い図形である．

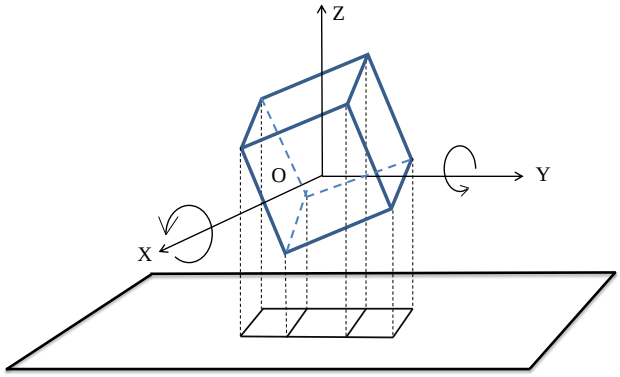

図-1　座標軸と回転の設定

ここでも，回転角度の組み合わせによって図形は異なり，十角形など多角形の中に多くの頂点が射影された図形を確認できた．

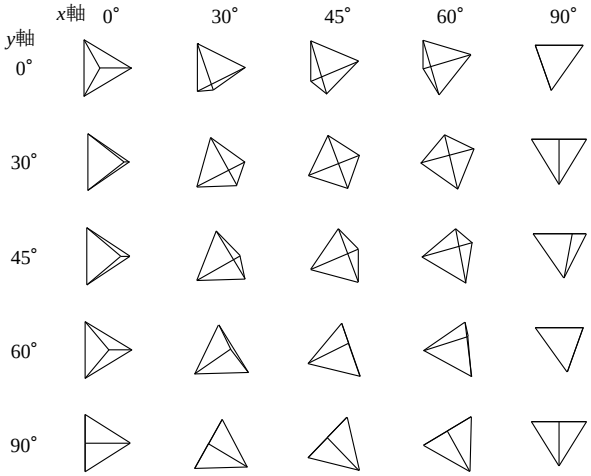

図-2　回転した正四面体の射影図

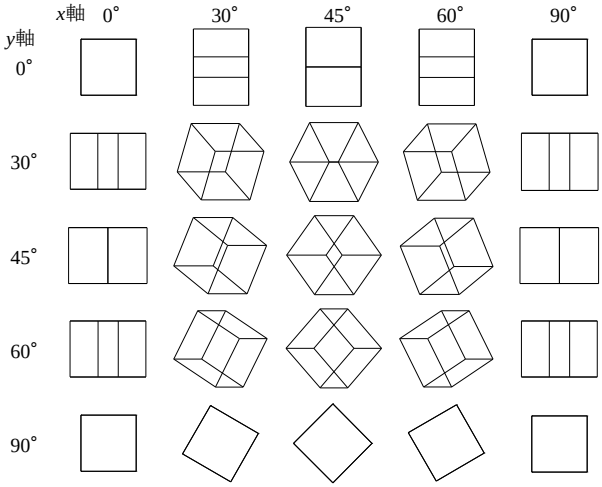

図-3　回転した正六面体の射影図

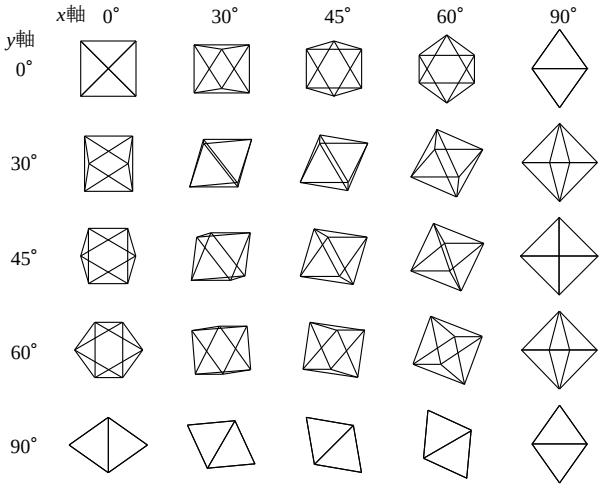

図-4　回転した正八面体の射影図

図-6 は，正二十面体の射影図である．多面体が有する頂点の数は 12 で，射影された図形は六角形もしくは八角形となっている．また，この多面体は隣接する面の数が 5 と多く，射影された図形の中を多くの線が交差していることが確認できる．

いずれも正多面体においても，対称性を有していることと，二軸の回転角度の組み合わせによる投射であることから，重複した射影図を確認することができる．また，X 軸，Y 軸，Z 軸周りの回転行列をそれぞれ R_X，R_Y，R_Z としたとき，

$$R_Y\left(\frac{\pi}{2}\right)R_X(a) = R_Z(-a)R_Y\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{2}$$

が成立し，このことは，X 軸周りに a°回転させた後，Y 軸周りに 90°回転させた図形は，Y 軸周りに 90°回転させた後，Z 軸周りに-a°回転させた図形に等しいことを示す．各射影図の Y 軸周りに 90°回転させた図形に着目すると，Z 軸を時計回りに a°（順に 30°，45°，60°，90°）回転させた図形となっていることが確認できる．

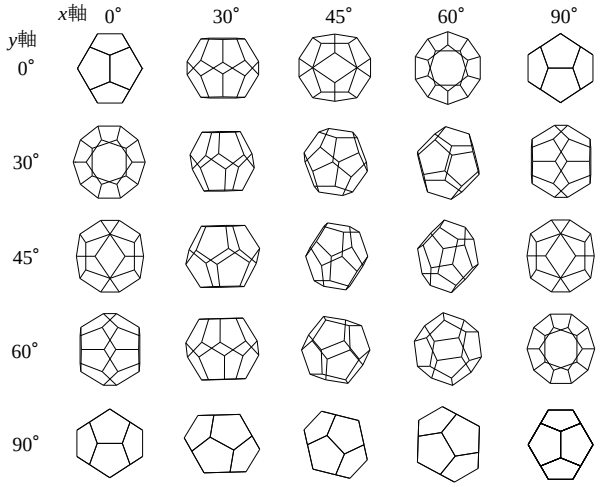

図-5　回転した正十二面体の射影図

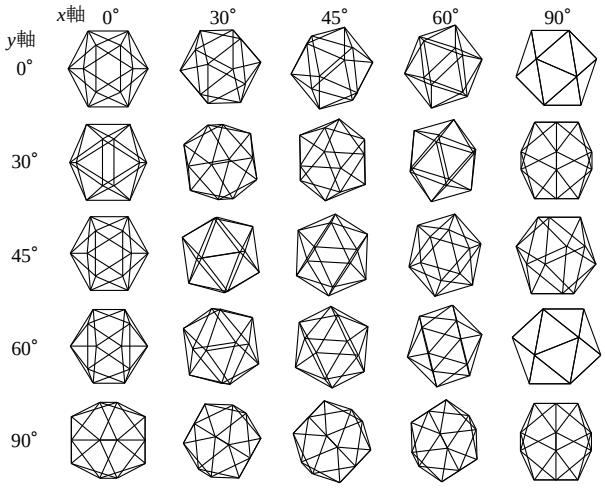

図-6　回転した正二十面体の射影図

３．骨組解析

ここでは，生成した射影モデルを構造物に適用した場合の骨組解析について述べる．

本研究では，X 軸，Y 軸周り共に回転角を 0°，30°，45°，60°，90°とし，それらの角度を組み合わせて正多面体を射影した図形を用いる．いずれの解析モデルについても外周の頂点を固定支持とし，面内において線分が交差する箇所は節点として扱い，剛接合とした．なお，面内に交点が得られないモデルは対象から除外し，外周の 2 頂点の中間点については支点とはせず節点移動を許容するものとした．また，本研究においては，基の多面体や回転角の組み合わせによって形状は異なるが，各モデルとも平面的に覆う面積は 100m^2 と一定となるようにした．

部材には，断面が外径 355.6mm で厚さ 8mm の鋼管（SN400）を用いており，荷重については，自重に加えて合計 100kN（1kN/m^2）の鉛直荷重が支点以外の各節点に作用するように，均等に配分した．図-7 に，骨組に鉛直荷重が作用したモデルの例を示す．

以上の設定条件のもと，Multiframe を用いて骨組解析を行った．また，比較する対象として格子状のモデルについても骨組解析を行った．なお，格子モデルの部材長は 5.000m としており，上述のモデルと同様に 100m^2 の平面を覆うものとしている．

４．解析結果

まず，5 つの正多面体の各射影モデルの最大鉛直変位について述べる．表-1 は，正四面体の回転角度を組み合わせたときの射影モデルにおける最大鉛直変位を示したものである．変位が最大となったのは，回転を与えなかったモデルであり，その最大鉛直変位は 75.10mm であった．一方で，最も変位が小さかったモデルは X 軸周りに 60°，Y 軸周りに 60°回転させており，変位は 0.02mm だった．

同様に，正六面体の最大鉛直変位を表-2 に示す．最大となったモデルの最大鉛直変位は 18.31mm（X 軸周りに 45°，Y 軸周りに 0°回転）で，最小となったモデルは 2.93mm（X 軸周りに 30°，Y 軸周りに 60°回転）だった．

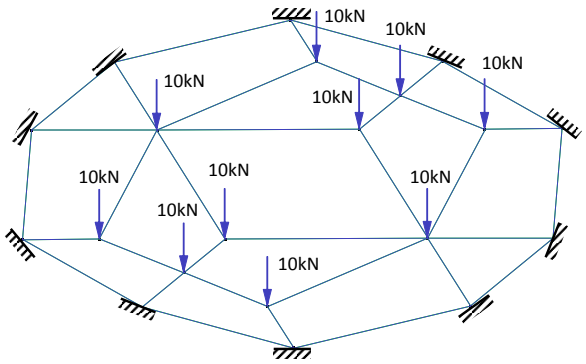

図-7　正二十面体の骨組解析モデル例（X : 0°，Y : 45°）

表-3 は，正八面体の最大鉛直変位を示す．最大となったモデルの最大鉛直変位は 45.25mm で，X 軸周りに 90°，Y 軸周りに 30°回転させている．最小となったモデルは，X 軸，Y 軸周り共に 30°回転させており，変位は 0.10mm だった．

表-4 に正十二面体の最大鉛直変位を示す．最大となったモデルは，Y 軸周りに 90°回転させた射影図であり，そのモデルの変位は 5.51mm だった．最小となるモデルは X 軸，Y 軸周り共に 45°回転させた射影図で，変位は 0.22mm だった．

表-5 は，正二十面体の射影モデルの最大鉛直変位を示す．最大の鉛直変位は 4.98mm で，X 軸周りに 90°，Y 軸周りに 0°回転させたモデルだった．最小の鉛直変位は 0.52mm で，Y 軸周りに 90°回転させたモデルだった．

これらをまとめると，いずれの多面体においても，角度の増加に伴う最大鉛直変位の傾向は見られなかった．今回の骨組解析においては，面内の節点に総荷重量が均一になるように鉛直荷重を分配し作用させていることから，荷重

表-1　正四面体の射影モデルの最大鉛直変位（mm）

Y \ X	0°	30°	45°	60°	90°
0°	75.10	1.43	7.57	3.17	-
30°	1.13	14.49	21.83	24.28	72.16
45°	6.51	2.87	8.26	10.89	21.80
60°	58.47	69.41	52.38	0.02	-
90°	72.16	72.16	72.16	72.16	72.16

表-2　正六面体の射影モデルの最大鉛直変位（mm）

Y \ X	0°	30°	45°	60°	90°
0°	-	6.99	18.31	6.99	-
30°	6.99	5.45	11.07	5.45	6.99
45°	18.31	5.23	6.98	5.23	18.31
60°	6.99	2.93	3.38	2.93	6.99
90°	-	-	-	-	-

表-3　正八面体の射影モデルの最大鉛直変位（mm）

Y \ X	0°	30°	45°	60°	90°
0°	29.66	8.02	1.74	1.37	-
30°	8.02	0.10	0.55	5.40	45.25
45°	1.74	0.61	3.25	6.64	29.66
60°	1.37	2.34	7.98	8.58	45.25
90°	-	-	-	-	-

表-4　正十二面体の射影モデルの最大鉛直変位（mm）

Y \ X	0°	30°	45°	60°	90°
0°	5.51	2.77	0.42	0.48	5.51
30°	0.48	0.65	1.16	0.92	0.84
45°	0.42	0.72	0.22	0.57	0.42
60°	0.84	0.90	0.50	0.39	0.48
90°	5.51	5.51	5.51	5.51	5.51

表-5　正二十面体の射影モデルの最大鉛直変位（mm）

Y \ X	0°	30°	45°	60°	90°
0°	0.78	0.76	0.86	1.17	4.98
30°	1.12	0.67	0.65	1.34	0.52
45°	0.80	1.32	1.04	0.80	0.78
60°	0.68	0.84	0.80	0.89	4.98
90°	0.52	0.52	0.52	0.52	0.52

作用位置が中心にあったり，作用点が少なかったりすると鉛直変位が大きくなることが確認できた．一方で，荷重の作用点が少なくても，作用位置が支点に近い場合，鉛直変位は小さくなることが確認できた．しかしながら，荷重作用位置が偏りすぎると構造のバランスを失うことから，骨組として適しているとは言い難い．

以上のことから，面数が少ない正四面体，正六面体，正八面体は最大変位が大きくなるモデルがいくつか見られ，比較対象の格子モデルの最大変位 8.636mm を超えた．また，節点が多い射影モデルの場合，部材量も増えることから全体的に鉛直変位は小さくなった．それでも，いずれの正多面体の射影モデルにおいても，格子モデルのそれより小さい変位が得られた射影モデルも得られたことから，変位について安定した形状もみられることが分かった．

次に，曲げモーメントについて述べる．表-6 から表-10 に各正多面体の射影モデルの最大曲げモーメントを示す．なお，格子モデルの最大曲げモーメントは 41.061kN･m であり，その値を基準に結果を考察する．

正四面体については，X 軸周り，Y 軸周り共に 45°回転させた射影モデルのみがその値を下回り，22.535kN･m だった．正六面体についても同様に，基準を下回る射影モデルが少なく，X 軸周りに 30°，45°，60°回転させ，さらに Y 軸周りに 60°回転させたモデルが下回った．それらの値は，それぞれ 40.862kN･m および 35.592kN･m だった．正八面体については，基準を下回るモデルがいくつか見られ，その値は 15.299～31.694kN･m だった．正十二面体および正二十面体については，ほとんどの射影モデルが基準を下回った．

これらのモデルについて，荷重作用位置が支点に近いことを除けば，支点が多いことに加えて，図形は明らかな対称性を有しており，面内における節点の配置のバランスが良いことが共通していると考えられる．

５．おわりに

本研究は，幾何学的な安定性が期待される形状を建築骨組への適用を検討したものである．ここでは，正多面体を回転させて投射することで，一つの多面体から多くの射影モデルを生成できた．また，骨組解析により，生成したモデルのうち，格子モデルと比べて変位や曲げモーメントの値が小さいモデルもみられた．このことは，構造的な安定性を有するモデルを生成できる可能性を確認できたものと考えられる．ただし，モデルによっては，部材長さに大きな差や荷重の作用に偏りがあるため，総部材量や荷重の作用について考慮するなど検討すべきことは多い．

今後の予定として，上述の検討すべき課題を明らかにすることに加え，作成した射影図により平面を充填させ，空間を覆う構造体として発停させる．さらに，コクセター群や E8 群を建築骨組に適用する予定である．

表-6　正四面体の射影モデルの曲げモーメント（kN･m）

Y\X	0°	30°	45°	60°	90°
0°	163.496	85.388	127.367	111.867	-
30°	81.997	123.813	108.793	139.797	132.663
45°	145.568	107.963	143.460	128.934	210.273
60°	234.274	204.180	246.518	22.535	-
90°	195.700	195.700	195.700	195.700	195.700

表-7　正六面体の射影モデルの曲げモーメント（kN･m）

Y\X	0°	30°	45°	60°	90°
0°	-	63.293	86.457	63.293	-
30°	63.293	52.562	63.934	52.562	63.293
45°	86.457	65.669	51.886	65.669	86.457
60°	63.293	40.862	35.592	40.862	63.293
90°	-	-	-	-	-

表-8　正八面体の射影モデルの曲げモーメント（kN･m）

Y\X	0°	30°	45°	60°	90°
0°	99.601	45.462	22.288	23.513	-
30°	45.462	18.091	31.694	58.343	91.265
45°	22.288	15.299	53.216	59.609	99.601
60°	23.513	16.403	46.230	52.243	91.265
90°	-	-	-	-	-

表-9　正十二面体の射影モデルの曲げモーメント（kN･m）

Y\X	0°	30°	45°	60°	90°
0°	55.835	23.321	17.610	15.844	55.835
30°	15.844	18.853	16.501	15.686	13.899
45°	17.610	19.186	10.531	18.079	17.61
60°	13.899	14.798	16.811	16.571	15.844
90°	55.835	55.835	55.835	55.835	55.835

表-10 正二十面体の射影モデルの曲げモーメント（kN･m）

Y\X	0°	30°	45°	60°	90°
0°	19.176	19.926	18.107	19.438	49.939
30°	18.53	13.208	19.258	20.47	9.015
45°	19.988	18.246	19.947	20.655	20.12
60°	19.257	17.381	18.885	18.071	49.939
90°	9.015	9.015	9.015	9.015	9.015

【謝辞】
本研究を遂行するにあたり，卒業研究として射影モデルの作成および骨組解析をした村田耀氏（現国土交通省九州地方整備局）に感謝します．

[参考文献]

1) 群の公理：　http://hooktail. sub. jp/algebra/GroupAxiom/
2) Yukihiro FUJIMOTO, Tatsuo KOBAYASHI, Kenji NISHIWAKI, Makoto SAKAMOTO, Yoshiyuki TATSUTA : “Comprehensive Analysis of Yukawa Hierarchies on T 2 /ZN with Magnetic Flux”, Phys. Rev. D 94, 035031 (2016), 035031-1-035031-14, arXiv : 1605.00140 hep-ph.
3) H.S.M コクセター：幾何学入門<上>，ちくま学芸文庫，2009.
4) 前稔文：群論由来の安定性を有する多面体の投射による骨組構造，日本建築学会大会学術講演梗概集，情報システム技術，pp. 33-34，2018. 9.

＊1　大分工業高等専門学校都市･環境工学科准教授 博士（工学）
＊2　フリーランス　修士（工学）
＊3　大分工業高等専門学校一般科理系　講師 博士（理学）