

トンネル法を用いた極小曲面探索法

○刀根 一将*¹
西村 督*²

キーワード：膜構造 極小曲面 多峰性 大域的最適解 トンネル法

1. 序

膜材料はクリープ、応力緩和しやすい材料である。初期張力導入時に膜面の張力分布が不均一の場合、最も歪エネルギーレベルが低く、均一の等張力状態へ移行しようとする性質がある。その結果、しわやたるみが生じ、ポンディングや膜の破壊原因となる。以上の理由から初期形状は膜応力分布が等張力となる等張力曲面が望ましい。等張力曲面は膜面の歪エネルギーが最小の状態のとき、曲面の面積が最小の極小曲面になることが知られている¹⁾。与えられた境界に張られる極小曲面を求める問題 (Plateau 問題) は多峰性を有する非線形問題となる。極小曲面を求める数値解析は面積が低下する形状座標を逐次計算で求め、面積が減少する座標が近傍に存在しない形状を探す最適化過程となる。

極小曲面を求める数値解析的研究は多く報告されている。Hinata²⁾は Plateau 問題に対して膜面積を表す一価関数の停留条件を満たす解を一般化ニュートン法で求める方法を示し、Wiener-Douglas 問題の解析結果を示している。文献2の解析結果では複数の極小解が存在する形状パラメータの範囲を示している。石原³⁾は極小曲面解析に複数の変分汎関数を線形結合した複合変分汎関数を定義し、関数を構成するパラメータを制御することで、求解過程で遭遇する特異点を回避できる手法を提案している。この手法を用いて内包体積と要素面積を付帯条件とした汎関数を用いて、Wiener-Douglas 問題の異なる3つの極小曲面を得ている。Tsuchiya⁴⁾は面積関数とエネルギー関数を最小にする2つの極小曲面解析法を提示している。求解に relaxation 法を用い、Wiener-Douglas 問題をはじめと様々な極小曲面解析を示している。以上の数値解析法は膜面を三角形、または四角形の1次要素でモデル化されている。要素の分割数は解の精度に大きく影響するため、多くの要素分割数が必要となる。この問題を解消するために藤田⁵⁾は陽な関数表現が可能なパラメータ表現による極小曲面解析法を提案している。

ある初期形状から得られた極小曲面は必ずしも最小面積曲面 (大域的最適解) が得られるとは限らず、面積極小 (局所最適解) の場合もある。この原因は多峰性を有する非線形問題の初期値依存性に依る (Fig.1)。面積極小曲面を求めるためには局所最適解に捕捉されずに面積

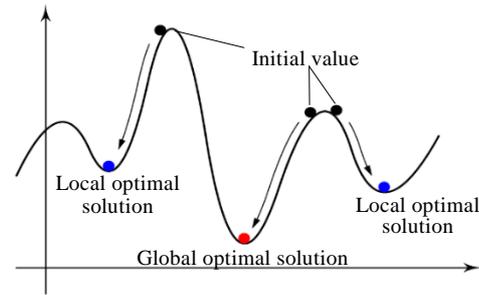


Figure1 Initial independence on nonlinear problem with multimodality

を最小化する数値解析上の戦略が必要である。初期値依存性の強い非線形最適化問題の解法として解探索の候補をランダムに設定し、評価関数から優位な候補値を採用する確率的探索を導入した発見的手法が応用されている。例えば三井⁶⁾は解の候補を複数設ける多点探索の一つである遺伝的アルゴリズムを用いて極小曲面を探索している。西村⁷⁾は単点探索の擬似焼きなまし法を極小曲面探索に適用し、Wiener-Douglas 問題の最小面積曲面を求めている。

既往の研究では確率的探索と対極に位置する確定的探索によって面積最小の極小曲面を求める手法が確立されているとは言い難い。本論文では多峰性関数の確定的最適化手法であるトンネル法を用いて最小面積の極小曲面を探索する数値解析手法を提示する。

2. トンネル法⁸⁾

Levy⁹⁾らによって提唱されたトンネル法は連続変数を対象とする関数最小化法で、極小または極大点を多く有する連続関数の大域的最小 (最大) 点を効率的に探索する解法である。トンネル法は以下に示す極小化ステップとトンネルステップの2つのステップの繰り返しにより、大域的最適解を求める方法である。

[1] **極小化ステップ**: 評価関数に対して任意に与えられた初期値 x_1^0 から出発して近傍での極小解 x_1^* を局所探索で求める。局所探索では関数変化が指定値になるように変数 x を線形化増分解析で求める。本論で示す膜面の極小曲面解析では評価関数は面積を表す面積関数 $S(x)$ 、変数 x は膜面の自由節点の座標である。このとき、その基礎式は次式で示される。

$$S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}_1^0) + \Delta S \approx S(\mathbf{x}_1^0) + \left. \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1^0} \Delta \mathbf{x} = S(\mathbf{x}_1^0) + \mathbf{a} \Delta \mathbf{x} \quad (1)$$

\mathbf{x}_1^0 は初期形状に対応する座標であり、逐次計算時は増分ステップの初期値となる。 \mathbf{a} は面積関数の勾配ベクトルであり自由度を n とすると n 次を行ベクトル、 $\Delta \mathbf{x}$ は節点変位である。式(1)の最小二乗解は

$$\Delta \mathbf{x} = \left. \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1^0}^{-1} (S(\mathbf{x}) - S(\mathbf{x}_1^0)) = \mathbf{a}^- \Delta S \quad (2)$$

と書ける。 ΔS は面積増分であり、 \mathbf{a}^- は次式で示される。

$$\mathbf{a}^- = \frac{\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}\mathbf{a}^T} (\text{Case: } \mathbf{a} \neq \mathbf{0}), \quad \mathbf{a}^- = \mathbf{0} (\text{Case: } \mathbf{a} = \mathbf{0}) \quad (3a,b)$$

\mathbf{a} は最小二乗解を得るための演算子であり、 \mathbf{a} が行列の場合、Moore-Penroseの一般逆行列となる。 \mathbf{a}^T は \mathbf{a} の転置を意味する。式(2)の逐次計算で極小解が得られたときは式(3b)の勾配ベクトルが $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ のときである。

[2] **トンネルステップ**: 本論では極小化ステップで得た極小解 \mathbf{x}^* から式(4)のトンネル関数 T を定義する。

$$T(\mathbf{x}) = \frac{S(\mathbf{x}) - \alpha S(\mathbf{x}^*)}{\{(x - x^*)^T (x - x^*)\}^\lambda}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4)$$

分子の α は $T \leq 0$ となる \mathbf{x} を求めるための解析制御パラメータである。分母の累乗の数 λ は極の強さを表す。後述する式(5)を満たす解法としてLevyら⁸⁾が提案した解法では極小解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k^*$ (k 番目の極小解)でトンネル関数が $T=0$ となることを避け、探索に必要な降下特性を得るために分母が零となる極の概念を導入している。

式(4)を線形近似した次式が極小面積以下となる条件 $S(\mathbf{x}) \leq S(\mathbf{x}^*)$ を満足するまで繰り返し解く。

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}^0) + \Delta T \approx T(\mathbf{x}^0) + \left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} \Delta \mathbf{x} = 0 \quad (5)$$

ここに \mathbf{x}^0 は各増分ステップでの初期値であり、

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \quad (6)$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}}{\{(x^0 - x_k^*)^T (x^0 - x_k^*)\}^\lambda} \quad (7)$$

$$\mathbf{b}_2 = -2\lambda \frac{S(\mathbf{x}^0) - \alpha S(\mathbf{x}_k^*)}{\{(x^0 - x_k^*)^T (x^0 - x_k^*)\}^{\lambda+1}} \{x_1^0 - x_1^*, \dots, x_n^0 - x_n^*\} \quad (8)$$

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は n 次を行ベクトルである。式(5)の最小二乗解は式(2)と同様に次式で示される。

$$\Delta \mathbf{x} = -(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)^{-1} T(\mathbf{x}_0) \quad (9)$$

求解後、座標を $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}$ で更新し、 $S(\mathbf{x}) \leq S(\mathbf{x}^*)$ を満足するまでトンネルステップを繰り返す。 $S(\mathbf{x}_2^0) \leq S(\mathbf{x}_1^*)$ を満足する \mathbf{x}_2^0 が次の極小化ステップの初期値となる。

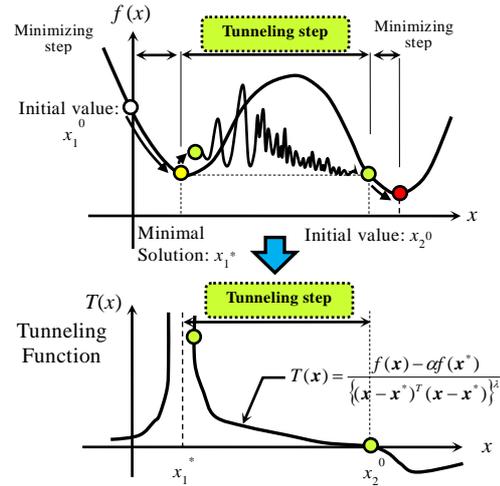


Figure 2 Tunneling Scheme

なお極小化ステップからトンネルステップへ移行する際、極小解から近傍の値にずらす。各座標は $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + d\mathbf{x}$ とし $d\mathbf{x} = r \times \text{rand}$ ($\text{rand}: -1.0 \sim 1.0$ の一樣乱数)、 $r(>0)$ は座標をずらす大きさを規定する解析パラメータである。

[1], [2]を繰り返しトンネルステップで $S(\mathbf{x}_{k+1}^0) \leq S(\mathbf{x}_k^*)$ を満足する次の出発値 \mathbf{x}_{k+1}^0 が見つからないと判断されたとき探索を終了し、一つ前の極小化ステップで得た \mathbf{x}_k^* を大域的最適解とする。トンネル法のスキームの模式図をFig.2に示す。3つの解析制御パラメータ α, λ, r の設定は、各1パラメータのみ変化させ、5回以上の同一計算で過半以上の同じ結果が得られたことを確認し決定した。

3. 極小曲面の探索

2で述べた探索アルゴリズムの妥当性を検証するために代表的な極小曲面の数値解析を行う。

3.1 Wiener-Douglas 問題

Wiener-Douglas 問題は平行な2つの円弧を垂線で繋いだ閉曲線を固定境界とし、この境界に張られる極小曲面を求める問題である^{2),3),4)}。

解析モデルはFig.3に示す円筒状で円周方向に対して1/2モデルとした。初期形状を三角形で構成し円周方向に20分割、高さ方向に10分割し、半径 $R=1.0$ 、高さ $L=1.5$ 、円弧の角度 $\phi=5\pi/6$ とする。この境界形状のとき、2つの極小解と1つの極大解が存在することが知られている²⁾。解析制御パラメータをTable.1に示す。解析制御パラメータの設定値はTable.1の $\alpha=0.97, \lambda=1.0, r=0.01$ を採用する。極小化ステップ中の式(2)の指定面積増分 ΔS は現在の面積 S に対して $-S/2000$ とする。

Fig.4は膜面積の変化である。点Aの初期形状から式(2)を解くと、点B(437step)で $\mathbf{a}^T \mathbf{a}$ が $1.0e-5$ 以下に減少したため、式(3b)に該当するとして極小曲面が得られたと判断した。その面積は3.52622である。続いて点C(438step)に示す近傍の形状に変化させた。以降面積は500step近

くまで変動しながら増加する傾向が見られる。Fig.5 にトンネルステップ(438-763step)における式(4)のトンネル関数 T の変化を示す。初期値は点 C で 17.8774 であり、その後の関数値はわずかに変動を繰り返しながら漸近的に減少する。点 D(763step)で面積が $S=3.51674$ となり点 B の極小解の面積以下となったため、極小化ステップに切り替える。その後面積は単調に減少し、点 E(1582step)で $a^T a < 1.0e-6$ となり 2 つ目の極小曲面に達したと判断した。このときの面積は 3.50707 である。

Fig.6 に点 B, D, E のときの Fig.3 に示す対称面上($y=0$)の断面形状を示す。B, E の極小曲面の鞍点($z=0$)の x 座標を図中に記す。文献 2 での鞍点の x 座標と極小解での面積を Table.2 に示す。Table.2 中の記号(C)および(F)は文献 2 で示された円柱座標系および自由境界プログラムで得られた結果を意味する。本解析結果は文献 2 と比較して鞍点が負側に位置するが、最初の極小曲面からトンネルステップを経て更に面積が小さい点 E の極小曲面への移動を確認することができる。点 E での膜曲面は文献 2 の最小面積曲面と対応する。Fig.6 中の緑の実線は No.595

のときの断面形状である。鞍点の x 座標がほぼ零であり、この形状は極大解に対応する形状³⁾であるため、トンネルステップで極大解を通過していることが確認される。

解析制御パラメータに関して、 $\alpha=0.97, \lambda=1.0, r=0.01$ を基準とし、パラメータの設定が解析結果に及ぼす影響を検討する。Fig.7 はトンネル関数の目標面積に対する比 α をパラメータとしたときの面積変化である。 $\alpha=0.95$ の場合、 $S(x) \leq S(x^*)$ を満たす膜面は見いだせなかった。 $\alpha=0.99$ の場合、 $S(x) \leq S(x^*)$ を満たしトンネルステップを終了し、極小化ステップに移行したが、その後に極小解は得られなかった。2000step での面積は 3.52244 である。トンネル法で一般に用いられている $\alpha=1.0$ の場合は、トンネルステップで点 B の極小曲面の形状を保ったままである。Fig.8 に 2000step 時の膜形状を示す。 $\alpha=0.95$ の膜面は鞍点が $x=0$ に近づいている。Fig.9 は式(4)の極の強さ λ をパラメータとした結果である。 $\lambda=0.5 < 1.0$ の場合、膜面は点 B の極小解に捕捉されてしまう。 $\lambda > 1.5$ の場合、Fig.9 と Fig.10 よりトンネルステップを終えていない。Fig.11 はトンネルステップ開始時に各節点を移動させる座標ベク

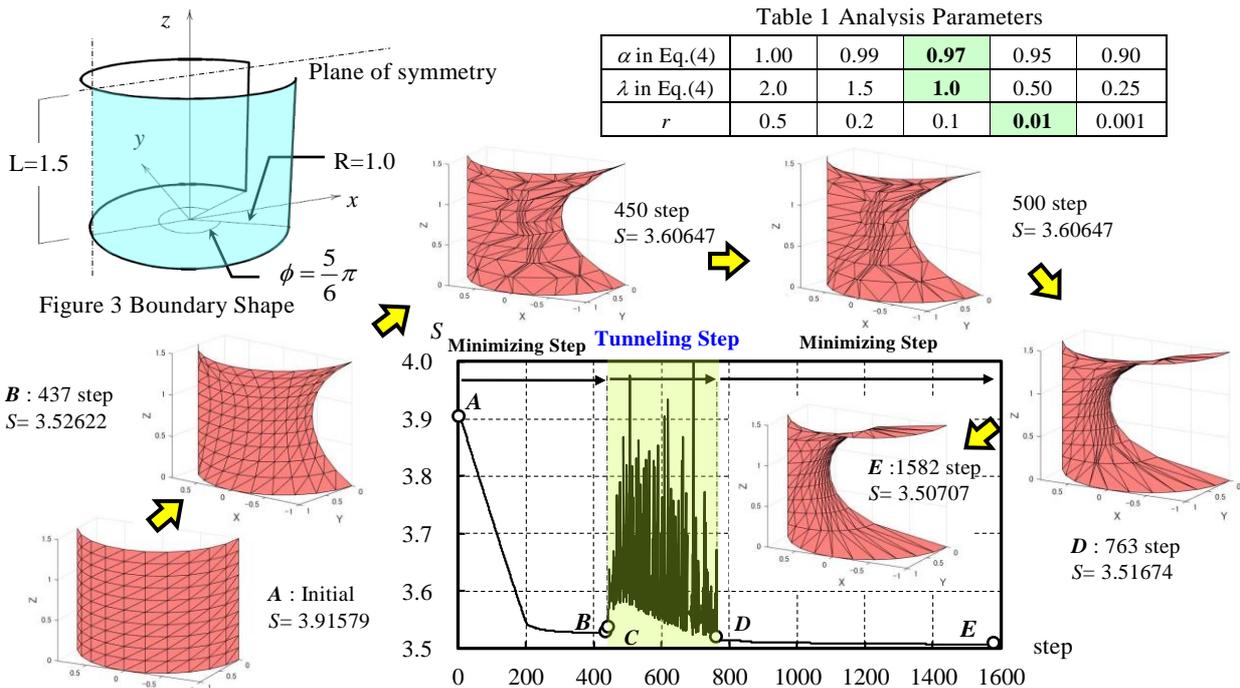


Figure 4 The History of Area of Membrane ($\alpha=0.97, \lambda=1.0, r=0.01$)

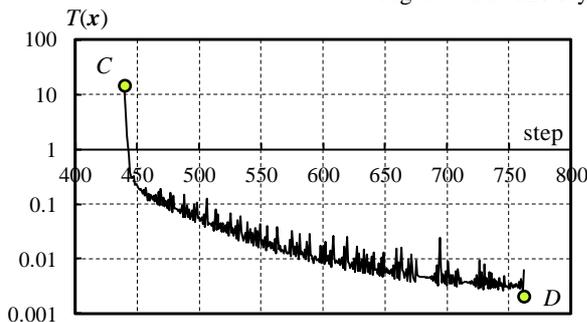


Figure 5 Tunneling Function

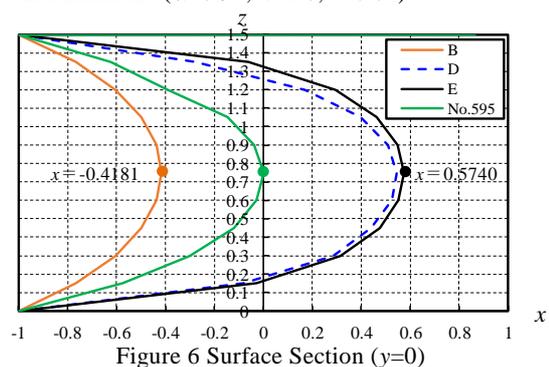


Figure 6 Surface Section ($y=0$)

トルの振幅を意味する r をパラメータとした結果である。 $r=0.001=R/1000$ の場合、移動量が小さく、最初の極小解に捕捉される。 $r=0.1=R/10$ の場合、トンネルステップを終わっているが次の極小化ステップで極小解は得られず、垂直境界線付近に三角形要素が密集する形状に収束する。面積は 3.51502 と最小面積の 3.50707 より大きい値が得られた。 $r=0.5=R/2$ の場合、点 B の極小解の形状から発散するように形状探索してしまう。

3. 2 回転懸垂曲面

回転懸垂曲面は平行な同一円を固定境界として境界間に張られる極小曲面である。境界間の距離が境界円の半径に対して 1.325487 倍以下のとき、極小解と極大解が存在する。初期形状から離れた極小解（最小面積曲面）

が得られることを確認するために極大解近傍に初期形状を設け、トンネルステップから開始する。初期面積 177.8、境界形状は半径 5 の円、境界間 6 である。解析制御パラメータは $\alpha=0.97$, $\lambda=1.0$, $r=1.0$ とした。

解析結果は Fig.13 の面積変化より 164 step でトンネルステップを終え、極小化ステップで得られた収束形状の面積は 300 step で 176.2 である。面積の解析解は 175.0 であり解析解と良く対応している。最終の収束形状で不規則な要素配置となる理由はトンネルステップ終了時の要素配置が乱れているためと考えられる。

以上よりトンネル法を用いた極小曲面探索法を検討し、適切な解析制御パラメータを設定することで最小面積の極小曲面が得られることを示した。

Table 2: x -coordinate of Saddle Point on Minimal Surfaces and the area

	Point B		Point E	
	x -coordinate	Area	x -coordinate	Area
Ref.[2]	-0.3900(C) -0.3946(F)	3.53272(C) 3.53310(F)	0.6117(C) 0.6036(F)	3.50847(C) 3.51284(F)
Present	-0.4181	3.52622	0.5740	3.50707

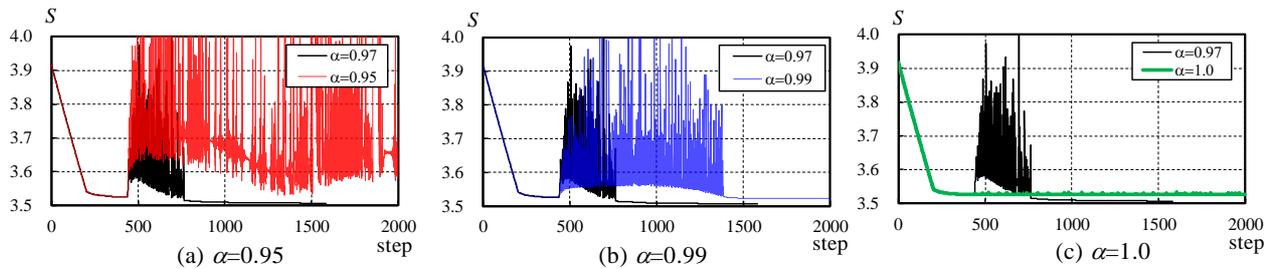


Figure 7 The History of Area of Membrane ($\alpha=0.95, 0.99, 1.0, \lambda=1.0, r=0.01$)

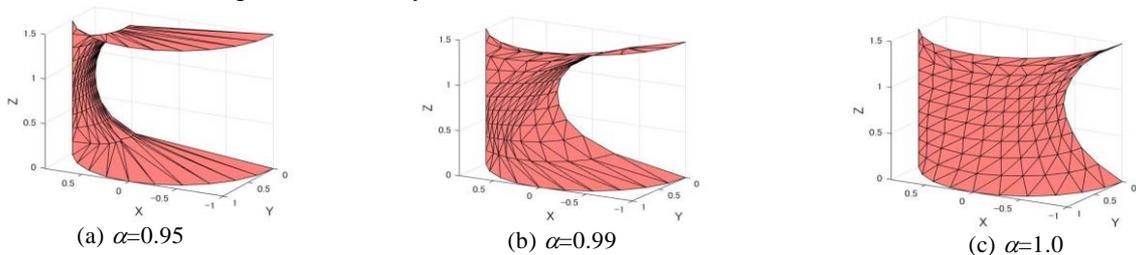


Figure 8 Surface Shape at 2000 step

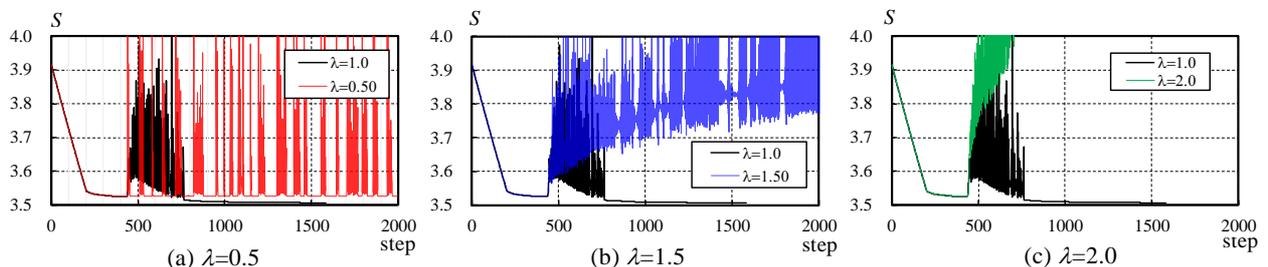


Figure 9 The History of Area of Membrane ($\alpha=0.97, \lambda=0.5, 1.5, 2.0, r=0.01$)

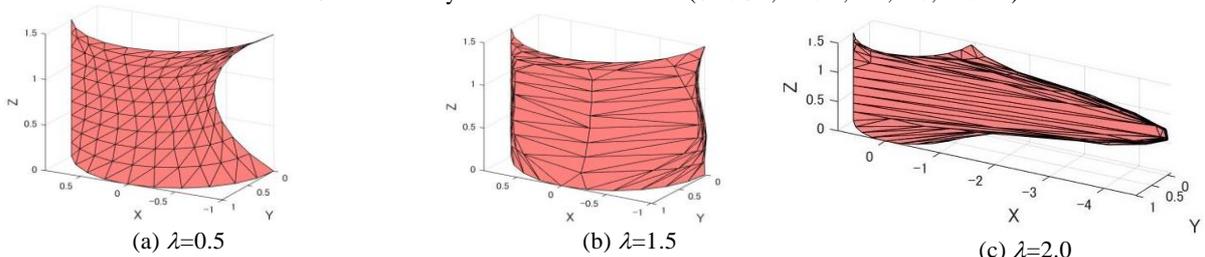


Figure 10 Surface Shape at 2000 step

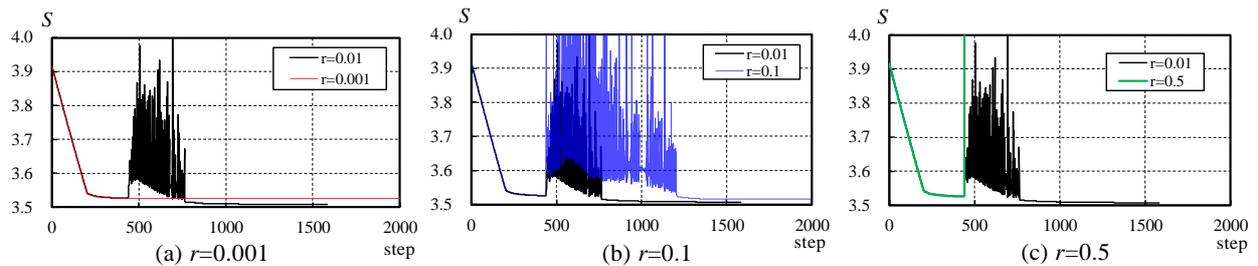


Figure 11 The History of Area of Membrane ($\alpha=0.97, \lambda=1.0, r=0.001, 0.1, 0.5$)

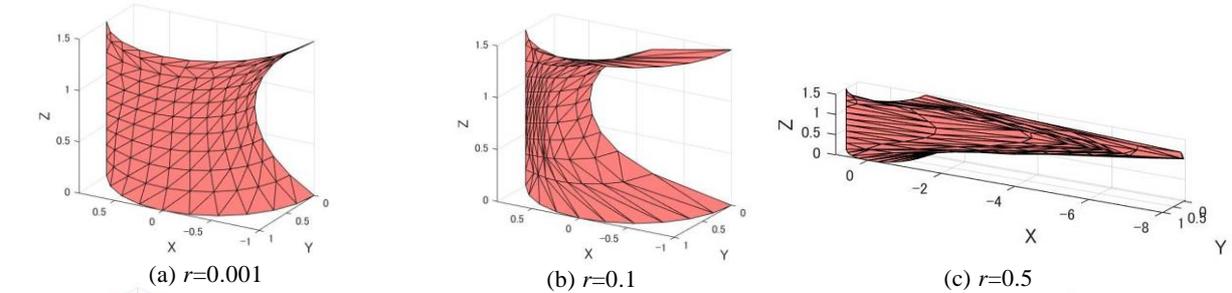


Figure 12 Surface Shape at 2000 step

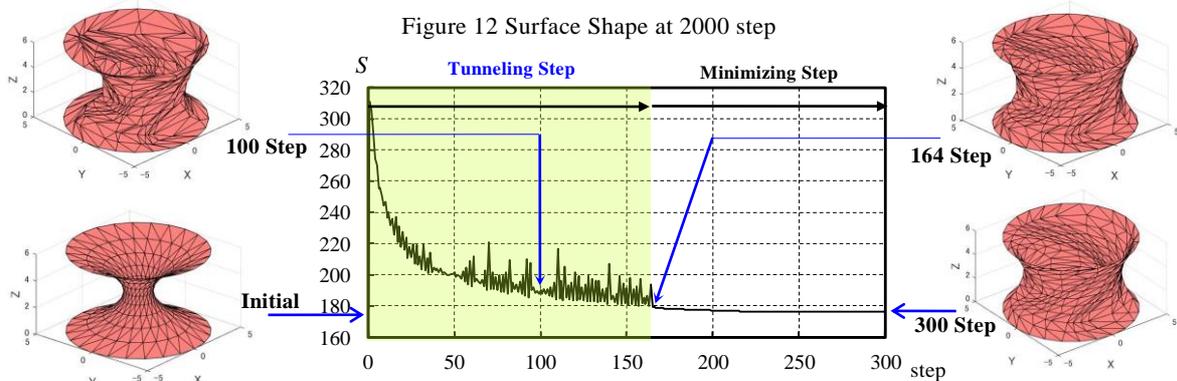


Figure 13 The History of Area of Membrane in Catenoid ($\alpha=0.97, \lambda=1.0, r=1.0$)

4. 結論

本論文では多峰性関数の確定的最適化手法であるトンネル法を適用した最小面積の極小曲面を探索する数値解析手法を提示した。同一境界に対して異なる極小曲面を張る Wiener-Douglas 問題と回転懸垂曲面の極小曲面解析を実施し、以下の事項を確認した

- [1] 解析制御パラメータをトンネル関数の目標面積と極の強さ、極小解からの移動量とし、各パラメータを適切に設定することで、局所探索とトンネルステップを繰り返して最小面積の極小曲面が得られる。
- [2] 目標面積よりわずかに小さい面積をトンネル関数に用いるとトンネルステップを脱しやすい。
- [3] 極の強さと極小解からの移動量は解探索に非常に敏感であり、設定に注意を要す。

本手法は固定境界以外にケーブル等の不伸長移動境界に対しても極小化ステップで適合条件を追加すれば適応可能である。

- 2) Hinata, M., Shimasaki, M. and Kiyono, T.: Numerical Solution of Plateau's Problem by a Finite Element Method, *Mathematics of Computation*, Vol.28, No.125, pp.45-60, 1974.1.
- 3) 石原競, 八木孝憲, 萩原伸幸, 大森博司: 極小曲面解析による膜構造の形状解析 複合変分関数を用いて, *日本建築学会構造系論文集*, 第 469 号, pp.61-70, 1995.3.
- 4) Tsutiya, T.: On Two Methods for Approximating Minimal Surfaces in Parametric Form, *Mathematics of Computation*, Vol.46, No.174, pp.517-529, 1986.
- 5) 藤田慎之輔, 寒野喜博, 大崎純: パラメトリック曲面として記述された極小曲面の形態創生手法, *日本建築学会構造系論文集*, 第 82 巻, 第 738 号 pp.1299-1307, 2017.8.
- 6) 三井和男, 登坂宣好: 遺伝的アルゴリズムの空間構造形態解析への応用, *日本建築学会構造系論文集*, 第 484 号, pp.75-83, 1996.6.
- 7) 西村督, 山中郁美: 擬似焼きなまし法を用いた膜曲面の極小曲面探索法, 第 37 回情報・システム・利用・技術シンポジウム論文集(論文), pp.85-90, 2014.12.
- 8) 例えば 長祥隆: 工学問題を解決する 適応化・知能化・最適化法, 技報堂, pp.176-184, 1996.10.

【参考文献】

- 1) 大森博司: 設計用原型曲面の形態解析, *生産研究*, 47 巻, 1 号, pp.18-19, 1995.1.

- *1 金沢工業大学大学院 工学研究科博士前期課程
- *2 金沢工業大学建築学科 教授 博士(学術)

Minimal Surface Search Method Using Tunnel Method

○Kazumasa TONE*¹

Toku NISHIMURA*²

Keywords : Membrane Structure, Minimal Surface, Multimodality, Global Optimization, Tunnel Method

Membrane structures, constructed by light-weight and processed woven fabric material, is one example of tensile structures. Creep and stress relaxation occurs easily in membrane materials. If the distribution of tensile stress on the membrane surface is unbalanced during introduction of initial tensile stress, there is a tendency that the stress distribution transits to lowest energy level and uniform. As the result, ponding and tear of membranes occur due to wrinkling and sag. Above the mentioned, initial surface, everywhere uniformly stressed in all direction, is desirable.

It is known that the uniform stress surface implies the least strain energy surface and corresponds to minimal area surface. The problem, which studies minimal surfaces spanned in boundaries, is called *Plateau problem*. The problem is generally multimodal non-linear problem with some extremums. The sequential computation to minimize the surface area yields the coordinates of surfaces to prescribed reducing area. This process leads into an optimization to minimize the surface area. Searching at any initial surfaces, the obtained minimal surface may be a local optimal solution and not be always global optimal solution. A numerical strategy is necessary not to capture local minimal solutions and to obtain the least area surface.

Solving the problems with some minimal surfaces by linearized incremental analysis, depending on initial surface, the obtained minimal surface is not necessarily global optimal solution what is called least area surface. It is caused by initial independence on nonlinear problem with multimodality. As the solution of high initial independent optimal problem, recently heuristic methods such as generic algorithm, cellular automaton, simulated annealing, etc., are applied in engineering fields. Nishimura and Yamanaka are proposed a membrane shape analysis applying simulated annealing. The numerical results show that the global optimal solution can be found on Catenoid and Courant problem.

Tunnel method has been utilized for the global optimization in multimodal problems; nevertheless, it has not been applied for minimal surface analysis. In this paper, we examine the numerical method to find out minimal area surfaces using tunnel method. Control parameters are the rate to target surface area, the intensity of pole in tunneling function and the norm of the coordinate vector to shift each node at the beginning of the tunneling step. It is illustrated in Courant problem and Catenoid that setting relevant control parameters, the minimal surface with least area can be found.

*1 Graduate Student, Graduate School of Engineering, Kanazawa Institute of Technology

*2 Professor, Department of Architecture, Kanazawa Institute of Technology, Ph. D.