統計的信頼性評価法を持つ拡散系システム同定理論と事例検討

Diffusion System Identification Theory with Statistical Reliability Evaluation Method and Some Case Study

2009年6月22日

奥山博康　清水建設㈱技術研究所

Hiroyasu Okuyama, Institute of Technology
Shimizu Corporation

拡散系のシステム同定法の意義

建物の熱損失係数を現場測定するために室内を電熱ヒータで暖め内外温度差から推定する方法が考えられる．しかし実際には外気温と日射量の変動が外乱として作用するので，一定の内外温度差や発熱量にはならず，簡単な算術式で適切に熱損失係数を求めることは難しい．

また換気量の測定法としてトレーサガスの一定濃度法が用いられるが，この方法によれば建物内の各ゾーンへ直接侵入する外気量は把握できても，ゾーン間の風量を知ることはできないので，多数室換気測定法とは言えない．

しかしこれら温度やガス濃度の多数室での拡散系を連立常微分方程式モデルでとらえ，温度やガス濃度を一定とするのではなく，むしろ変動させることによって，このモデルのパラメータをシステム同定することは可能である．

システム同定の信頼性評価方法の必要性

一般に測定法の多くは，何らかの物理法則を表わす方程式モデル中のパラメータを他の変数やパラメータの測定から推定するものであることが多い．例えば熱伝導率，比熱，・・・等もそうである．すなわち多くの測定法は方程式モデルのシステムパラメータ同定と見なせる．

しかしその方程式の構造やパラメータが前提とする線形性，不変性や一様性が実際には成立たないことが多い．これによるパラメータ同定誤差への影響は，多くの場合に測定誤差よりも大きい．

従ってパラメータ同定のために必要最小限の数の条件で同定されたパラメータにより形成された方程式に，さらに様々な条件の測定変数を代入していけば大きな方程式誤差が表れることが多い．

すなわち測定誤差だけを考慮した信頼性評価方法では不十分である．本論では沢山の条件での測定によって生じる方程式残差も利用して信頼性を評価する方法を示し事例検討する．

システム同定の方法（非負最小二乗法）

同定パラメータ ***a*** に関する方程式モデルを $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}_k$ と定め，この方程式誤差 $\mathbf{e}_k$ を次式の様に定める．

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{b}_k - \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{a},\ \text{ここに}\ \mathbf{e}_k : \left[\text{方程式誤差}\right],\ \mathbf{b}_k : \left[\text{測定値ベクトル}\right],\ \mathbf{F}_k : \begin{bmatrix}\text{拡散量の保存則}\\ \text{風量の連続式}\\ \text{各種の拘束条件式}\end{bmatrix},\ \mathbf{a} : \left[\text{同定パラメータ}\right]$$

この方程式誤差 $\mathbf{e}_k$ を測定期間で積分して評価関数をつくり，これを同定パラメータ ***a*** に関して最小にする最小二乗解は次式となる．

$$\hat{\mathbf{a}} = \left(\sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{F}_k \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{b}_k \right)$$

詳しくは，奥山博康，「統計的信頼性評価法を持つ拡散系システム同定理論」，日本建築学会大会学術講演梗概集（中国）2008年 9 月，環境工学Ⅱ，梗概番号41365，pp729-730

統計的信頼性評価の方法（モデル前提の不適合率β）

方程式誤差の期待値マトリックスから同定パラメータへの伝播式が記述できる. この時に方程式誤差の期待値マトリックスの取り方に2通り考えられる.

ひとつは方程式残差の期間平均と見なす方法であり, もうひとつは測定誤差分散からの伝播則で記述できるとするものである. 後者は, 実現象とモデル前提の不適合が無い場合のみに適切である.

本評価法は, これら2通りの関係に着目して導入した方法である.

$$\beta = \frac{\sigma_\lambda}{{}_m\sigma_\lambda} = \frac{\text{方程式残差からの同定パラメータ誤差標準偏差}}{\text{測定誤差からの同定パラメータ誤差標準偏差}}$$

従ってβの数値は小さいほど良好なシステム同定結果であることを意味する.

詳しくは, 奥山博康,「統計的信頼性評価法を持つ拡散系システム同定理論」, 日本建築学会大会学術講演梗概集（中国）2008年９月, 環境工学Ⅱ, 梗概番号41365, pp729-730

計算機実験による事例検討の方針

システム同定の信頼性評価理論の事例検討のためには, 推定するシステムパラメータの真値が分からなければならないので, いきなり実験や実測は適切ではない. そこで熱・換気・ガス回路網モデルの計算機シミュレーションにより模擬測定データを作成する.

ただし実際の現象とシステム同定モデルの構造的な食い違いが起こりやすい問題を含んだ事例とする. 建築熱性能の同定のために温度測定する場合には, 壁体内部の温度測定は困難であるし, 壁の表面温度を測定しても, それが平均的に代表する温度であるかは疑問である. また測定点数の制約からも室温の測定ぐらいで間に合せなければならないことが多いであろう.

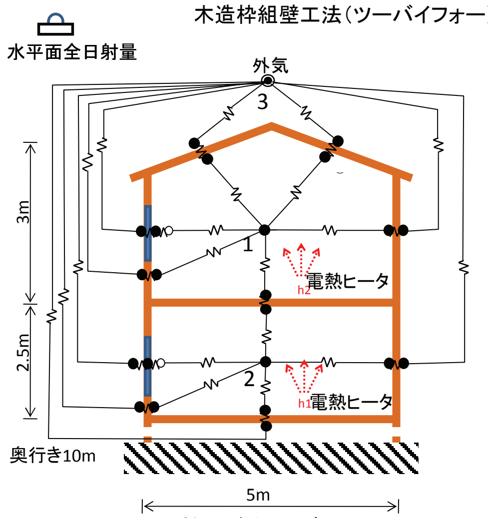
そこで模擬測定データ生成の計算モデルの節点数は壁体の節点数も含んで比較的に多くするが, システム同定のモデルの節点数は室温だけとする. つまり室温のみが測定されるものとする.

同定する熱損失係数は定常の特性なので, 測定期間は長めにして1週間程度とする. また並行的に多数室換気測定も行うとする.

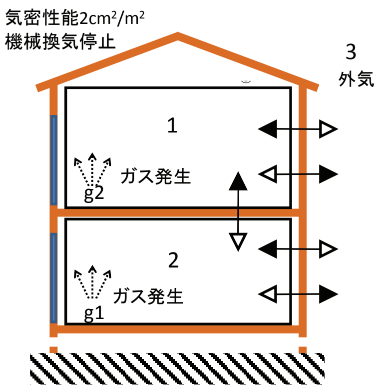
模擬測定データ作成モデル

木造枠組壁工法(ツーバイフォー)による2階建て住宅

冬季、東京の約1週間測定を想定



熱回路網モデル図



換気回路網モデル図

後に言及する RC系 とは壁体の節点の熱容量だけ2.5倍にしたモデルである

時間積分は差分近似なので誤差を小さくするため時間間隔を30秒で行った．伝熱系は計算結果をそのまま測定値として用い，ガス拡散系は実際の測器の制約を考慮して，1分間隔に間引いたものを測定値とした．

構成材料の厚みと熱伝導率

壁	構造用合板9mm　λ0.186(W/mK) 断熱材100mm　λ0.04 (W/mK) 構造用合板9mm　λ0.186(W/mK)
屋根	構造用合板15mm　λ0.186(W/mK) 断熱材150mm　λ0.04 (W/mK)
1階床	構造用合板15mm　λ0.186(W/mK) 断熱材100mm　λ0.04 (W/mK)
窓	透明フロートガラス3mmの複層ガラス 和障子
2階床	構造用合板9mm　λ0.186(W/mK) 空気層（相当ｺﾝﾀﾞｸﾀﾝｽ）4.65 (W/m²K) 構造用合板3mm　λ0.186(W/mK)

励振スケジュール

電熱ヒータ発熱スケジュール
夜間のみ3時間発熱・3時間停止の断続24時間周期

1階	夜間	18:00-21:00	0:00-3:00	6:00-9:00
2階		21:00-0:00	3:00-6:00	

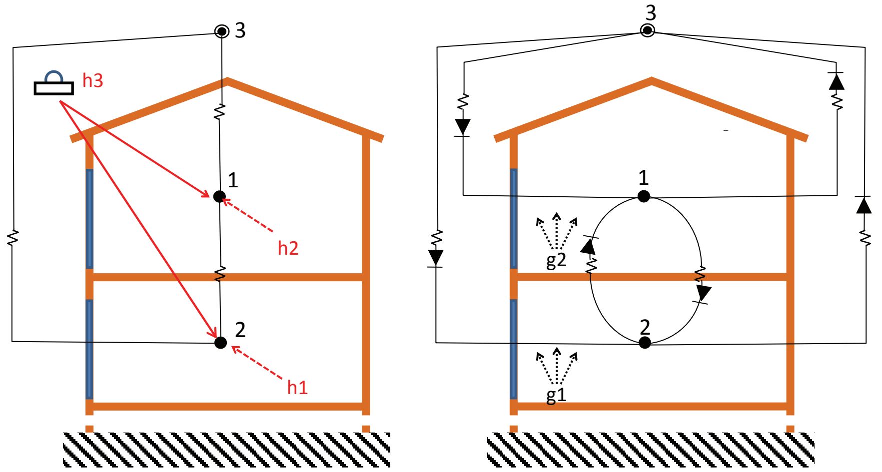
ガス発生スケジュール
午前と午後の2回、15分放散の2時間15分停止

1階	午前	0:00-0:15	2:30-2:45	5:00-5:15
	午後	12:00-12:15	14:30-14:45	17:00-17:15
2階	午前	1:15-1:30	3:45-4:00	6:15-6:30
	午後	13:15-13:30	15:45-16:00	18:15-18:30

誤差評価のための測定機器の誤差標準偏差

	温度拡散系同定モデル	トレーサガス拡散系同定モデル
濃度/温度測定誤差	0.1(℃)	3.0(mg/m^3)
ガス発生/ヒータ発熱誤差	20.0(W)	0.2(mg/s)

システムパラメータ同定モデル



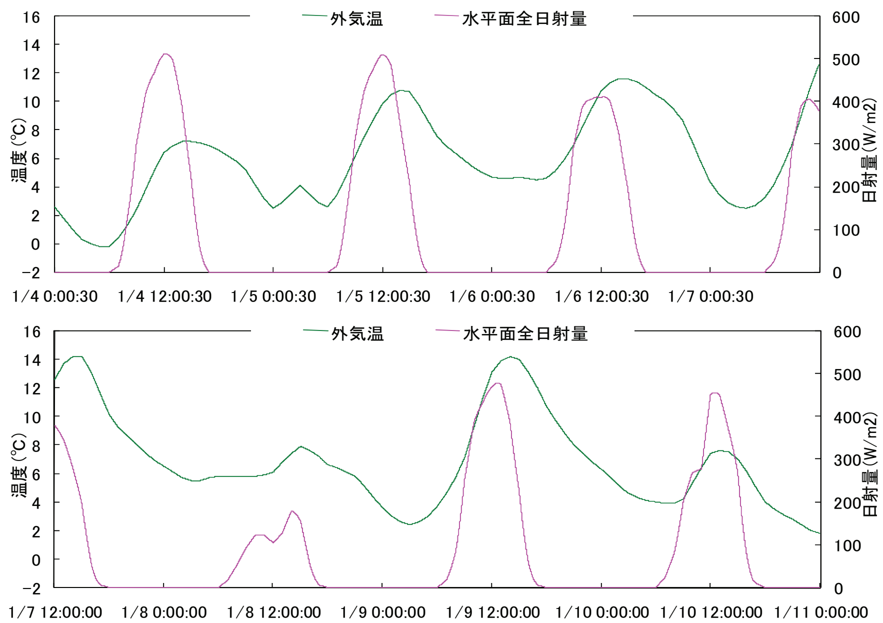
温度拡散系同定モデル

（赤）←---- 既知パラメータr_{ij}：消費電力(W)から室空気加熱となる割合1.0(100%)

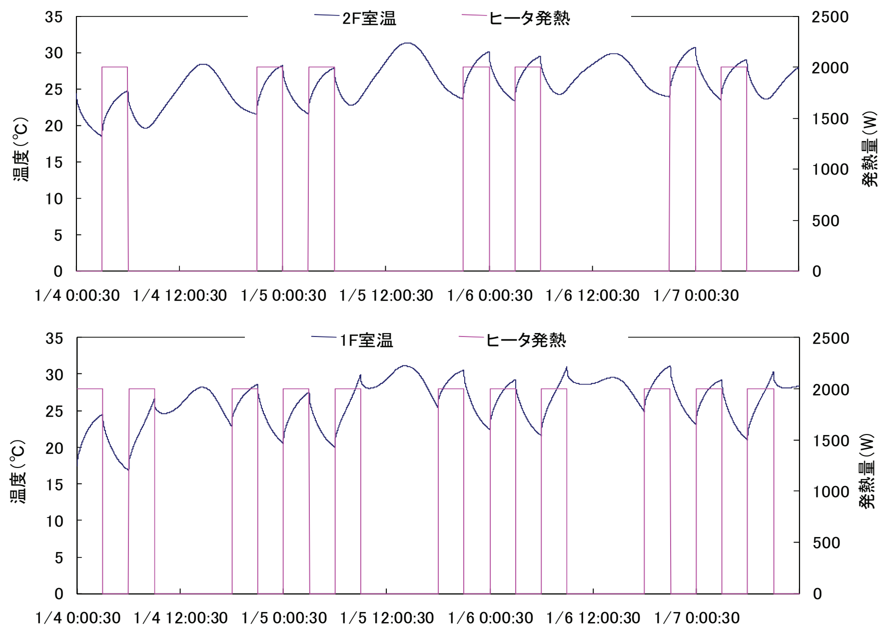
トレーサガス拡散系同定モデル

（黒）←---- 既知パラメータr_{ij}：ガス発生量mg/sが室空気へ混合される割合1.0(100%)

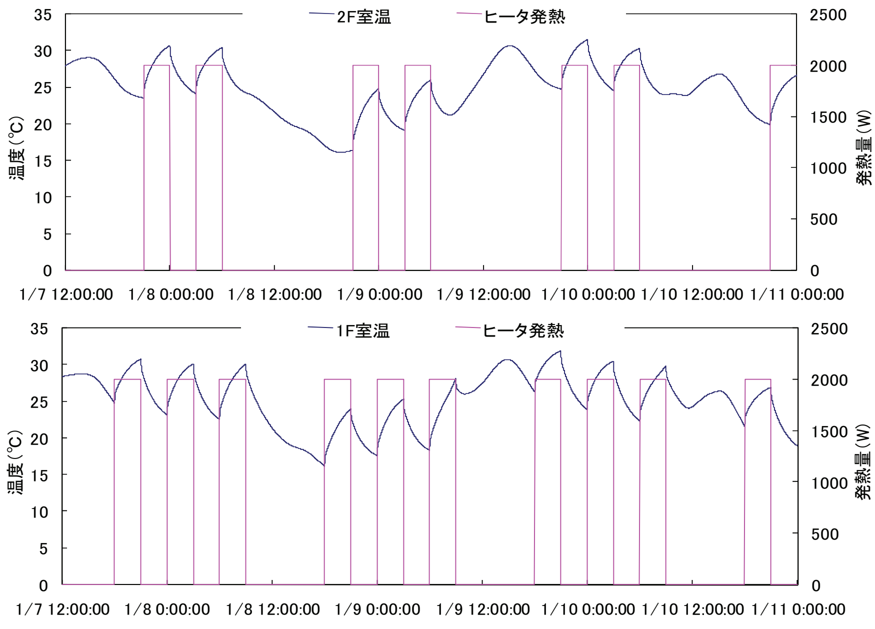
実線：同定するシステムパラメータのコンダクタンスなど



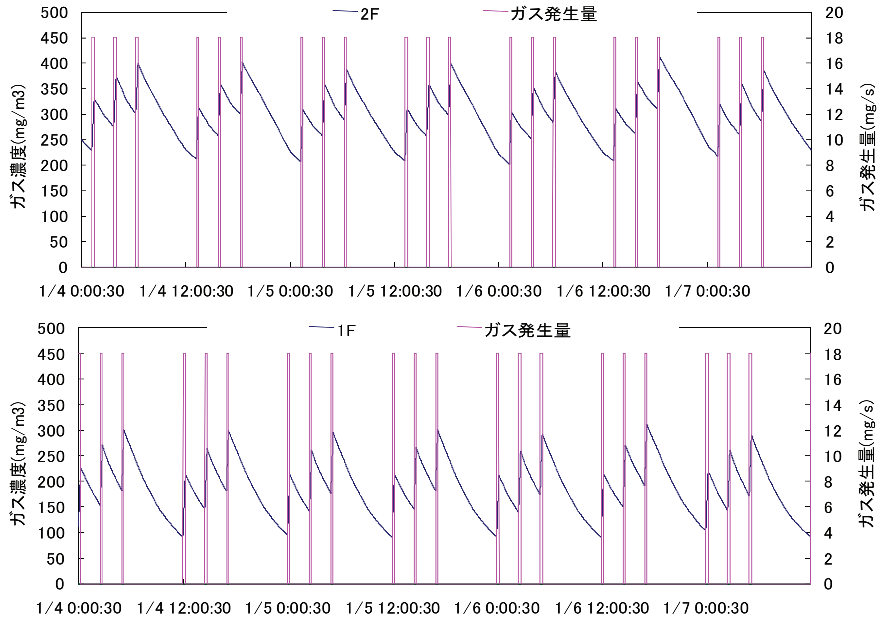
東京の標準気象データ利用（1/4　0:00:30から1/11　0:00:00）



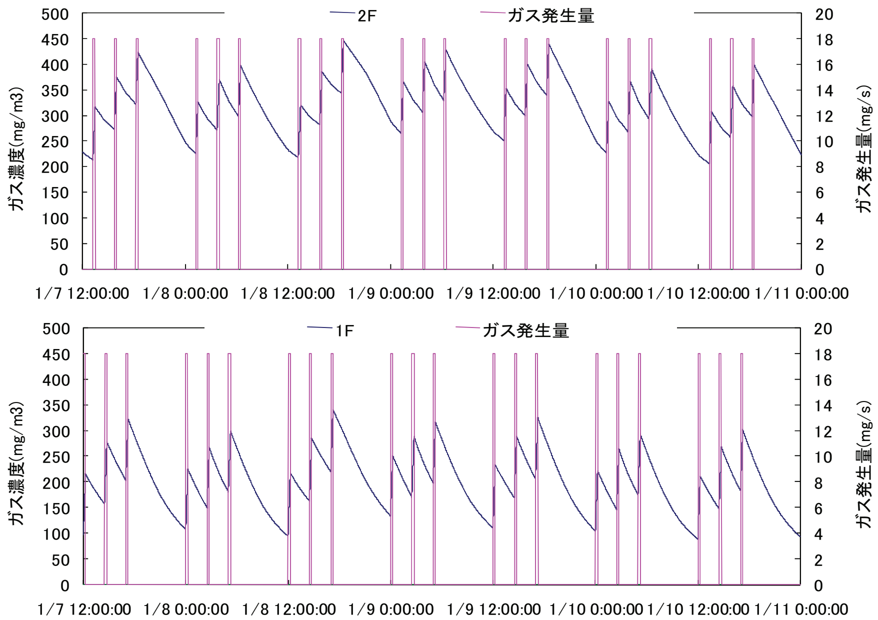
1/4 0時から1/7 12時 室温模擬測定データ(節点番号1,2)



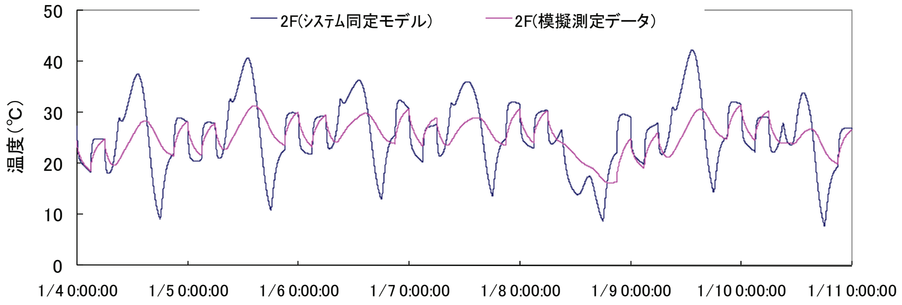
1/7 12時から1/11 0時 室温模擬測定データ(節点番号1,2)

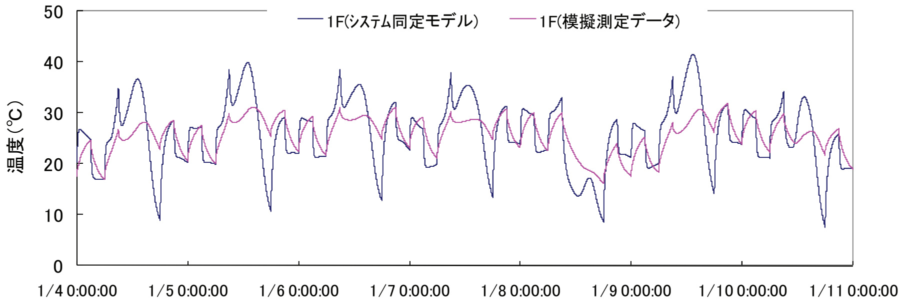


1/4 0時から1/7 12時 ガス濃度模擬測定データ(節点番号1,2)



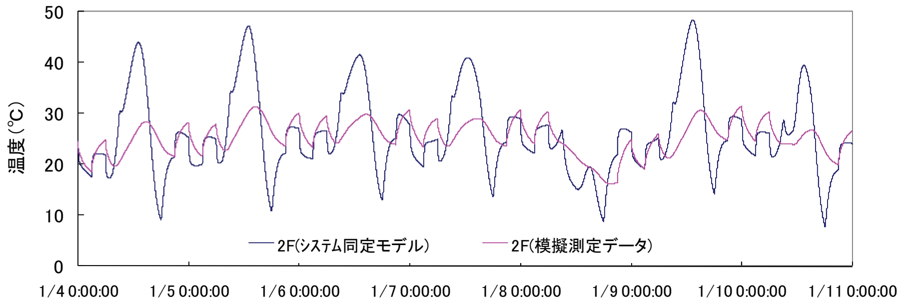
1/7 12時から1/11 0時 ガス濃度模擬測定データ(節点番号1,2)

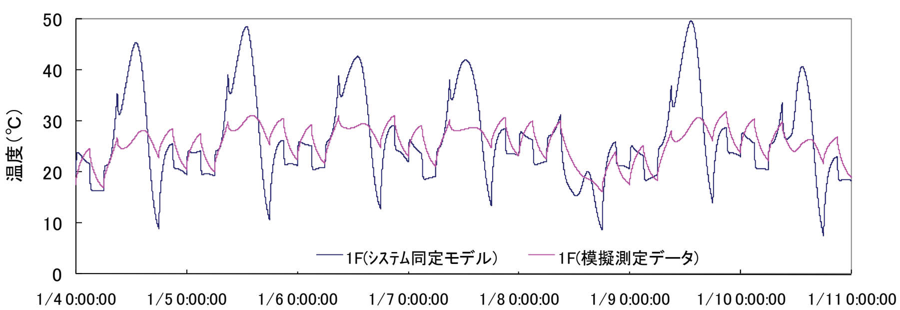




木質系モデルによる模擬測定データとシステム同定モデルによる室温差異

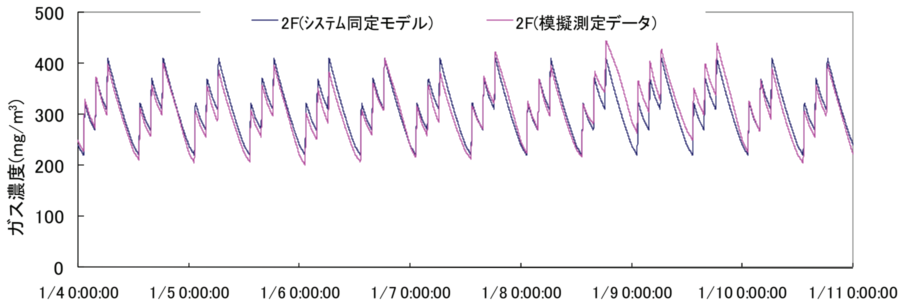
15

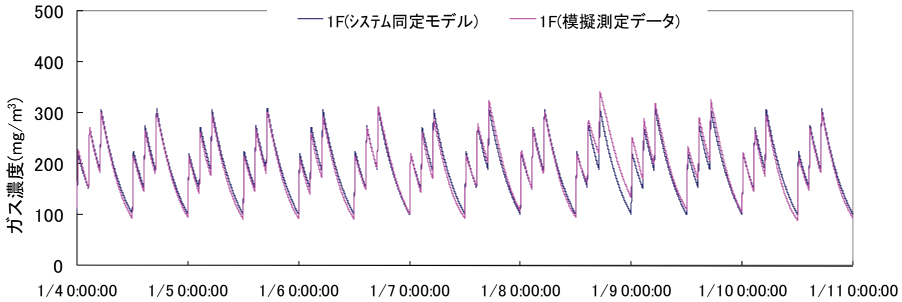




RC系モデルによる模擬測定データとシステム同定モデルによる室温差異

16





模擬測定データとシステム同定モデルによるガス濃度差異

同定パラメータの真値(正解)の定め方

模擬測定データは計算機シミュレーションモデルで生成するので，各室から外気への真値の熱貫流のコンダクタンスは明らかである．しかし一般に熱損失係数は隙間風による熱損失も含む上に，隙間風量は室内外温度差の変化に伴って変化する．そこで測定期間での平均室内外温度を算出し，これらの温度を一定とするための各室の熱負荷(熱損失量)を計算した．また熱容量は予測計算モデルから真値が予め分かる．

一方，水平面全日射量に対する各室での日射取得係数の真値は，室内外温度が全て0℃で日射量のみが作用する条件で各室の冷房負荷を計算し，この期間平均負荷を，同じく期間平均の水平面全日射量に対する比率 r_{ij} として求めた．

期間平均内外温度

外気温	6.4℃	
平均室温	1階 25.68℃	2階 25.34℃
内外 温度差	1階 19.28℃	2階 18.94℃

日射取得率 r_{ij}

水平全日射	103.07 W/m2	
日射熱負荷	1階 310.7 W	2階 308.7 W
日射取得率 r_{ij}	1階 3.01	2階 2.99

ci,jはjからiへの熱コンダクタンス(W/K)
ri,jは水平面全日射量からの取得率
mi,jは熱容量(kJ/K)

温度拡散系

		$c_{3,1}$	$c_{3,2}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$	$c_{2,3}$	$c_{2,1}$	$r_{1,3}$	$r_{2,3}$	$m_{1,1}$	$m_{2,2}$	平均値
真値		41.8	54.8	118	41.8	54.8	118	2.99	3.01	196	163	−
推定値	木質系	44.3	52.7	115	44.3	52.7	115	3.02	3.04	196	196	−
	RC系	44.8	61.5	178	44.8	61.5	178	2.89	5.41	196	196	−
モデル前提不適合率β	木質系	0.23	0.24	0.27	0.27	0.58	0.58	0.58	0.27	0.27	0.58	0.39
	RC系	3.27	3.27	0.34	0.35	5.87	5.87	5.87	0.35	0.35	5.87	3.14
COD 決定係数	木質系	−0.84										
	RC系	−107.143										
RMS 二乗平均誤差	木質系	1階	5.07(℃)/平均25.68(℃)=0.20				2階	5.61(℃)/平均25.34(℃)=0.22				
	RC系	1階	7.09(℃)/平均25.68(℃)=0.28				2階	7.02(℃)/平均25.68(℃)=0.27				

ci,jはjからiへの風量(m^3/h)
mi,jは有効混合容積(m^3)

トレーサガス拡散系

	$c_{3,1}$	$c_{3,2}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$	$c_{2,3}$	$c_{2,1}$	$m_{1,1}$	$m_{2,2}$	平均値
真値	21.4	8.8	12.5	8.7	21	0	150	125	−
推定値	20.52	8.9	11.72	8.79	20.62	0	150	125	−
モデル前提不適合率β	3.16E−08	3.16E−08	1.51E−08	1.51E−08	3.95E−08	3.95E−08	1.51E−08	3.95E−08	2.84E−08
COD	1.00								
RMS	1階	19.80 (mg/m^3)/平均308(mg/m^3)=0.064			2階	13.36 (mg/m^3)/平均194(mg/m^3)=0.069			

考察

【1】 壁体の熱容量に影響された室温変化等の模擬測定値により，壁体の熱容量を無視したシステム同定モデルで，熱損失係数と日射取得係数などが予想外に良好に同定された．ただしモデル前提の不適合率βは，この食い違いをよく示している．βが1ぐらいまでは採用できる結果かもしれない．決定係数CODが負になっているのは，理論または計算プログラムの不具合か，CODの適用限界を示すと思われる．

【2】 換気測定における模擬測定値生成モデルとシステム同定モデルは構造的に一致する上に，模擬測定値には測定誤差を加えていないこと等から，βは10^{-8}の桁で非常に小さく，またCODは殆んど1になったと思われる．今後，意図的に乱数発生による測定誤差を加えた模擬測定値でも試してみる必要がある．

【3】 室空気の熱容量が正確に同定されたのは予想外である．同定モデルで無視した壁体熱容量が室空気へ帰着されると思われたからである．

【4】 実現象を考慮すると足りない節点数(測定点数)と思われるモデルでも妥当なシステム同定の可能性はあると思われる．また信頼性評価も可能と思われる．ただし理論的には，状態値の高階時間微分値を導入するシステム同定法[a]の可能性も考えられる．

(a)詳しくは，奥山博康，「熱回路網モデルのシステム同定理論の展開　低次化高階微分システムの観測から元の高次状態方程式をパラメータ同定する理論への拡張」建築学会大会学術講演梗概集，D-2，2004年8月，pp863-864

統計的信頼性評価法を持つ拡散系システム同定理論

正会員　　○　奥山 博康*1

熱回路網　　システム同定　　最小二乗法
誤差評価　　多数室換気測定　　方程式残差

はじめに

一般に測定の多くは方程式モデルのパラメータのシステム同定と見なせる．しかし方程式の構造やパラメータが前提とする線形性，不変性や一様性等が正確には成り立たないことが多い．これによる同定誤差は多くの場合に測定誤差よりも影響が大きい．幾つかの測定条件で同定されたパラメータであっても，さらに様々な条件での測定を行えば，比較的大きな方程式残差として表れる．従来の測定法[1]の信頼性評価には測定誤差だけが考慮されてきた．そこで本論では，著者の拡散系の汎用モデルに関して最小二乗法でパラメータ同定する既往の方法[2]を改善して，さらに新たに考案した信頼性評価指標について述べる．

パラメータの測定方程式

拡散系の空間的領域型の離散化モデルの骨組みは一般に(1)式の完全連結システムの節点方程式で記述できる．これにより状態方程式とも呼ぶ連立常微分方程式(2)が構成される．ここに x_j，$m_{i,j}$，$c_{i,j}$，$r_{i,j}$ は各々，節点 j の温度等の拡散ポテンシャル，節点 i に関する一般化容量，節点 j から節点 i への一般化コンダクタンス，熱流等の発生源 j から節点 i への自由入力係数である．また n は未知数扱いの，no は既知数扱いの節点数，ng は発生源の総数である．

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\cdot\dot{x}_j=\sum_{j=1}^{n+no} c_{i,j}\cdot(x_j-x_i)+\sum_{j=1}^{ng} r_{i,j}\cdot g_j \quad (1)$$

$$\mathbf{M}\cdot\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{C_o}\cdot\mathbf{x_o}+\mathbf{R}\cdot\mathbf{g} \quad (2)$$

この(2)式を次のパラメータの測定方程式(3)に変形する．一つの節点まわりには既知パラメータが少なくとも一個あるとし，変数 x_j か g_j との積によって作られる項は左辺の $\boldsymbol{y}$ の中に移項する．また被同定パラメータ $m_{i,j}$，$c_{i,j}$，$r_{i,j}$ によるベクトルを $\mathbf{m}$，$\mathbf{c}$，$\mathbf{r}$ として，これに係るマトリックスは $\mathbf{D}$，$\mathbf{X}$，$\mathbf{G}$ と定める．これらをまとめてサイズ na の $\mathbf{a}$ と $n\times na$ の $\mathbf{Z}$ を定める．

$$\mathbf{y}=\mathbf{D}(\dot{x}_i)\cdot\mathbf{m}+\mathbf{X}(x_i)\cdot\mathbf{c}+\mathbf{G}(g_i)\cdot\mathbf{r}=[\mathbf{D},\mathbf{X},\mathbf{G}]\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{m}\\\mathbf{c}\\\mathbf{r}\end{bmatrix}=\mathbf{Z}\cdot\mathbf{a} \quad (3)$$

測定時間間隔 Δt，総測定時点数は nt で測定期間は T とする．$(k-1)\Delta t$ から $k\Delta t$ までの線形補間積分により次式の $\mathbf{y}_k$，$\mathbf{Z}_k$ を定義し(6)をパラメータの測定方程式とする．

$$\mathbf{y}_k=\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t}\mathbf{y}\,dt \quad (4) \qquad \mathbf{Z}_k=\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t}\mathbf{Z}\,dt \quad (5) \qquad \mathbf{y}_k=\mathbf{Z}_k\cdot\mathbf{a} \quad (6)$$

最小二乗法の回帰式と解式

パラメータ $\mathbf{a}$ を最小二乗推定する回帰式を導く．パラメータ間には，流量収支，伝導の対称性，伝導率等の上位のパラメータへ回帰する際の従属関係等の拘束条件が存在する．これらは線形関係式であるから，マトリックス $\mathbf{S}$ とベクトル $\mathbf{d}$ によって(7)式で表現される．(6)式と(7)式を束ねて(8)式の方程式誤差 $\mathbf{e}$ を定義する．

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{d} \quad (7) \qquad \mathbf{e}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{y}_k\\\mathbf{d}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_k\\\mathbf{S}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{a} \quad (8)$$

ここで(8)式記述の簡単化のために，次の記号のベクトル $\mathbf{b}$ とマトリックス $\mathbf{F}$ を導入する．

$$\mathbf{F}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_k\\\mathbf{S}\end{bmatrix} \quad (9) \qquad \mathbf{b}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{y}_k\\\mathbf{d}\end{bmatrix} \quad (10)$$

こうして(8)式は次式で書き直される．

$$\mathbf{e}_k=\mathbf{b}_k-\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{a} \quad (11)$$

最小二乗化する評価関数 J を $\mathbf{e}_k$ の総時点数 nt にわたる総和によって定義する．この J を $\mathbf{a}$ で微分して 0 とおいた(13)式から，最小二乗解は(14)式となる．また非負最小二乗法[3]も(13)式から得られる方程式に適用できる．

$$J=\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k=\sum_{k=1}^{nt}{}^t(\mathbf{b}_k-\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}_k-\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{a}) \quad (12)$$

$$\frac{\partial J}{\partial\mathbf{a}}=2\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{a}-2\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{b}_k=\mathbf{0} \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{a}}=\left(\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{F}_k\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{b}_k\right) \quad (14)$$

また推定パラメータの誤差分散共分散マトリックス $\mathbf{\Lambda}$ は，方程式誤差の期待値マトリックスからの伝搬として計算すれば次式が得られる．

$$\mathbf{\Lambda}=\left(\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{F}\cdot E(\mathbf{e}\cdot{}^t\mathbf{e})\cdot\mathbf{F}\right)\cdot{}^t\left\{\left(\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}\right)^{-1}\right\} \quad (15)$$

この方程式誤差期待値マトリックスは残差からのものと測定誤差からのものと二通り定義できる．

方程式残差からの誤差伝播と決定係数

方程式残差は，(14)式による推定パラメータによって，(11)式と同様な次の(16)式で計算される．

$$\mathbf{v}_k=\mathbf{b}_k-\mathbf{F}_k\cdot\hat{\mathbf{a}} \quad (16)$$

これにより方程式誤差期待値マトリックスは(17)式で計算され，これを適用した場合の $\mathbf{\Lambda}$ を $\mathbf{\Lambda a}$ とする．単に nt で割らないのは，na の分だけ自由度を下げたからである．次に決定係数の算出に必要な残差二乗和は(18)式で計算される．

Diffusion System Identification Theory with Statistical Reliability Evaluation Method

OKUYAMA Hiroyasu

$$E(\mathbf{e}_k \cdot {}^t\mathbf{e}_k) = \frac{1}{nt-na}\sum_{k=1}^{nt}\mathbf{v}_k \cdot {}^t\mathbf{v}_k \quad (17) \qquad s(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \quad (18)$$

総変動は次の(19)式で計算される．さらにこれらの残差二乗和と総変動から決定係数は次の(20)式で計算される．

$$s_y = \sum_{k=1}^{nt}{}^t(\mathbf{b}_k - \bar{\mathbf{b}}) \cdot (\mathbf{b}_k - \bar{\mathbf{b}}) = \sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_k - \frac{1}{nt}\left(\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{b}_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{nt}\mathbf{b}_k\right) \quad (19)$$

$$COD = 1 - \frac{s(\hat{\mathbf{a}})}{s_y} \qquad (20)$$

測定誤差からの誤差伝播

温度や日射量の測定誤差やガス濃度やガス発生量の測定誤差分散から推定パラメータへの誤差伝播を記述する．いま x_i と g_i の測定値が瞬時的な観測誤差分散 σx^2 と σg^2 を持つとする．これらの x_i と g_i を Δt の区間で積分した値と増分を時系列方向に総和して使用するが，x_i と g_i に関する Δt 積分結果の誤差分散 $s\,\sigma x^2$，$s\,\sigma g^2$ や，増分計算結果の誤差分散 $b\,\sigma x^2$ は，誤差伝播則により次の様に計算される．

$${}_b\sigma_{xi}{}^2 = 2 \cdot \sigma_{xi}{}^2 \qquad (21)$$

$${}_s\sigma_{xi}{}^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot \sigma_{xi}{}^2 \quad (22) \qquad {}_s\sigma_{gi}{}^2 = \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot \sigma_{gi}{}^2 \quad (23)$$

ここで測定データのベクトルと，これらが持つ誤差分散ベクトルを次のように定義する．

$${}_b\mathbf{x}_k = {}^t\left({}_b x_{1k}, \cdots, {}_b x_{nk}\right) \quad (24) \qquad {}_b\boldsymbol{\sigma}_k = {}^t\left({}_b\sigma_{x1}, \cdots, {}_b\sigma_{xn}\right) \quad (25)$$

$${}_s\mathbf{x}_k = {}^t\left({}_s x_{1k}, \cdots, {}_s x_{nk}, \cdots, {}_s x_{n+no,k}\right) \qquad (26)$$

$${}_s\boldsymbol{\sigma}_x = {}^t\left({}_s\sigma_{x1}, \cdots, {}_s\sigma_{xn}, \cdots, {}_s\sigma_{xn+no}\right) \qquad (27)$$

$${}_s\mathbf{g}_k = {}^t\left({}_s g_{1k}, \cdots, {}_s g_{ngk}\right) \quad (28) \qquad {}_s\boldsymbol{\sigma}_g = {}^t\left({}_s\sigma_{g1}, \cdots, {}_s\sigma_{gng}\right) \quad (29)$$

${}_b\mathbf{x}_k$，${}_s\mathbf{x}_k$，${}_s\mathbf{g}_k$ は各々真値に誤差 ${}_b\mathbf{s}_{xk}$，${}_s\mathbf{s}_{xk}$，${}_s\mathbf{s}_{gk}$ が加わったものと見なす．パラメータの推定誤差原因は x_j と g_j の測定誤差だけとすれば，真値の x_j と g_j は状態方程式誤差を 0 にする．また(7)の拘束条件は測定誤差と無関係だから，(8)式等から次式が記述できる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_k &= \begin{bmatrix} -\mathbf{M}\cdot{}_b\mathbf{x}_k + [\mathbf{C},\ \mathbf{C_o}]\cdot{}_s\mathbf{x}_k + \mathbf{R}\cdot{}_s\mathbf{g}_k \\ \mathbf{d} - \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{M}\cdot{}_b\mathbf{s}_{xk} + [\mathbf{C},\ \mathbf{C_o}]\cdot{}_s\mathbf{s}_{xk} + \mathbf{R}\cdot{}_s\mathbf{s}_{gk} \\ \mathbf{d} - \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{a}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{M}\cdot{}_b\mathbf{s}_{xk} + [\mathbf{C},\ \mathbf{C_o}]\cdot{}_s\mathbf{s}_{xk} + \mathbf{R}\cdot{}_s\mathbf{s}_{gk} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (30)\end{aligned}$$

この ε_k の上半分を ${}_u\varepsilon_k$ と表すことにする．

$${}_u\boldsymbol{\varepsilon}_k = -\mathbf{M}\cdot{}_b\mathbf{s}_{xk} + [\mathbf{C},\ \mathbf{C_o}]\cdot{}_s\mathbf{s}_{xk} + \mathbf{R}\cdot{}_s\mathbf{s}_{gk} \qquad (31)$$

状態方程式誤差が x_j と g_j の測定誤差だけに起因するとすれば，方程式誤差 ${}_u\varepsilon_k$ の期待値マトリックスは次式で計算される．

$$\begin{aligned}E({}_u\boldsymbol{\varepsilon}_k\cdot{}_u\boldsymbol{\varepsilon}_k) &= \mathbf{M}\cdot E({}_b\mathbf{s}_{xk}\cdot{}_b{}^t\mathbf{s}_{xk})\cdot{}^t\mathbf{M} \\ &\quad + [\mathbf{C},\ \mathbf{C_o}]\cdot E({}_s\mathbf{s}_{xk}\cdot{}_s{}^t\mathbf{s}_{xk})\cdot{}^t[\mathbf{C},\ \mathbf{C_o}] \\ &\quad + \mathbf{R}\cdot E({}_s\mathbf{s}_{gk}\cdot{}_s{}^t\mathbf{s}_{gk})\cdot{}^t\mathbf{R} \\ &= \mathbf{M}\cdot diag({}_b\boldsymbol{\sigma}_x\cdot{}_b{}^t\boldsymbol{\sigma}_x)\cdot{}^t\mathbf{M} \\ &\quad + [\mathbf{C},\ \mathbf{C_o}]\cdot diag({}_s\boldsymbol{\sigma}_x\cdot{}_s{}^t\boldsymbol{\sigma}_x)\cdot{}^t[\mathbf{C},\ \mathbf{C_o}] \\ &\quad + \mathbf{R}\cdot diag({}_s\boldsymbol{\sigma}_g\cdot{}_s{}^t\boldsymbol{\sigma}_g)\cdot{}^t\mathbf{R} \qquad (32)\end{aligned}$$

これにより下半分のベクトルも加わった ε_k の期待値マトリックスは次式で計算される．

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_k\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_k) = \begin{bmatrix} E({}_u\boldsymbol{\varepsilon}_k\cdot{}_u\boldsymbol{\varepsilon}_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (33)$$

ここに誤差 ${}_b\mathbf{s}_{xk}$，${}_s\mathbf{s}_{xk}$，${}_s\mathbf{s}_{gk}$ の間での共分散は 0 であることと，これら３つのベクトル内の要素間の共分散も 0 である性質を用いた．また $diag$ はこの括弧の中のマトリックスの対角要素だけによって構成されるマトリックスを表す．この(33)式による方程式誤差の期待値マトリックスを，(17)式のそれの代わりに用いることで，測定誤差からの推定パラメータの分散共分散マトリックス ${}_m\boldsymbol{\Lambda}_a$ が計算される．

$${}_m\boldsymbol{\Lambda}_a = \left(\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}\right)^{-1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{F}\cdot E(\boldsymbol{\varepsilon}_k\cdot{}^t\boldsymbol{\varepsilon}_k)\cdot\mathbf{F}\right)\cdot{}^t\left\{\left(\sum_{k=1}^{nt}{}^t\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}\right)^{-1}\right\} \quad (34)$$

モデル前提の不適合率

数学モデルの前提が，どの程度実現象で成り立っているかの判断を，この ${}_m\Lambda_a$ に対して Λ_a の大きさを比較することによって行うことができる．ここで ${}_m\Lambda_a$ の j 番目の対角要素を ${}_m\sigma_{\lambda\ jj}^2$ で，Λ_a の j 番目の対角要素を $\sigma_{\lambda\ jj}^2$ で表す．これらの対角要素の平方根をとって，次式の比率 β を定義する．全ての対角要素についての β を平均化したものはモデル前提の不適合率と呼ぶことにする．

$$\beta_j = \frac{\sigma_{\lambda\ j,j}}{{}_m\sigma_{\lambda\ j,j}} \quad (35) \qquad \bar{\beta} = \frac{1}{na}\sum_{j=1}^{na}\beta_j \quad (36)$$

このモデル前提の不適合率が大きい場合には測定の条件やモデルに不適切なところがあると考えられるので，やり直す必要がある．

さらに不合理な負のコンダクタンスが推定された場合の状況から考案した評価指標もあるが紙幅により割愛する．

まとめ

多くの測定法は，実現象を単純化した方程式モデルでのパラメータ推定である以上，モデル前提と実現象の食い違いは避けられない．この信頼性評価指標として，最小二乗法に基づき，方程式残差および測定誤差からの伝播式を導き，モデル前提の不適合率と呼ぶ指標を定義した．今後は事例検討も行っていきたい．

【参考文献】

[1] 例えば：空気調和・衛生工学会規格「SHASE-S116-2003 トレーサーガスを用いた単一空間の換気量測定法」，2004 年 6 月 2 日第一刷発行
[2] 奥山博康：「一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論」，日本建築学会論文報告集，Vo1．344，1984 年 10 月，pp103-115
[3] Charles L. Lawson, Richard J. Hanson (1974) “Solving Least Squares Problems”, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia ISBN0-89871-356-0 (pb)

*1 清水建設(株)技術研究所・上席研究員・工博
*1 Chief Research Engineer, Institute of Technology, Shimizu corporation, Dr. Eng.

熱回路網モデルのシステム同定理論の展開
低次化高階微分システムの観測から元の高次状態方程式をパラメータ同定する理論への拡張

正会員　○奥山博康 *1

熱回路網　システム同定　低次化高階微分システム
状態方程式　最小二乗法　多数室換気測定

１．はじめに

既報（[1],[2]他）の一般的拡散系のシステム同定理論では，その節点系モデルの全ての節点に励振を与え，状態値が観測できるものとしたが，困難な場合がある．例えば，多数室換気測定では天井裏空間や押入れ等は存在さえ分からないことがある．また建物の熱性能測定では，熱容量の大きい壁がある場合，壁内に発熱を与え温度測定も行うことは難しい．このことを数学モデルの観点からは，元の比較的に沢山の節点で高次な連立常微分方程式モデルと等価でありながらも少ない節点で低次なモデルに置き換え，この励振・応答の観測から元のシステムの同定を行う問題と見なされる．本論では問題解決の基本的アイデアを述べ，最も簡単な具体的事例で説明し検証した．

２．基本的アイデア

元の高次な連立常微分方程式モデルを状態方程式モデルと呼ぶ．この状態ベクトルを，励振・観測が可能なものを$\mathbf{x}_1$に，その他の不可能なものを$\mathbf{x}_2$に分ける．すると状態方程式は (1)式に示すように記述される．ここで$\mathbf{x}_1$に関する式を取り出して両辺時間微分し 2 次微分を持つ式と，$\mathbf{x}_2$に関する式を取り出し，両式から$\mathbf{x}_2$を消去した(2)式を記述することができる．低次化システムのパラメータは元の状態方程式のパラメータと関係式を持つ．既報のシステム同定理論を(2)式をその観測方程式として適用し，この(2)式のパラメータ同定が成されれば，元(1)式のパラメータも求められる．

３．簡単な例題での理論の説明

最も簡単で具体的な事例で説明と検証を行う．図 1 に示すように押入れを持ち周囲が外気の居室を想定する．空間容積や風量等の記号は図中に示す．この 2 室モデルの元の状態方程式は(3)式で記述され，本問題設定では押入れはガス供給も濃度観測も不可能とする．

$$\begin{bmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} q_{1,3} \\ 0 \end{bmatrix}\cdot x_3+\begin{bmatrix} r_{1,1} \\ 0 \end{bmatrix}\cdot g_1 \quad (3)$$

ここにコンダクタンスマトリックス対角要素は,

$$q_{1,1}=-q_{2,1}-q_{3,1} \quad (4), \qquad q_{2,2}=-q_{1,2} \quad (5)$$

である．(3)の上半分から次式を記述する．

$$x_2=q_{1,2}^{-1}\cdot(v_1\cdot\dot{x}_1-q_{1,1}\cdot x_1-q_{1,3}\cdot x_3-r_{1,1}\cdot g_1) \quad (6)$$

一方，(3)の下半分の式へ(6)式を代入する．

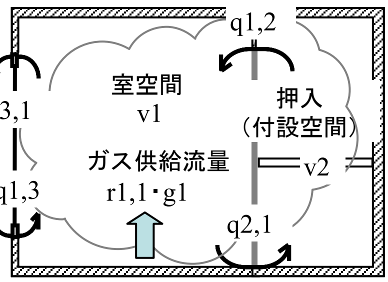
$$\dot{x}_2=v_2^{-1}\cdot q_{2,1}\cdot x_1+v_2^{-1}\cdot q_{2,2}\cdot q_{1,2}^{-1}\cdot(v_1\cdot\dot{x}_1 -q_{1,1}\cdot x_1-q_{1,3}\cdot x_3-r_{1,1}\cdot g_1) \quad (7)$$

これら(6)と(7)式で$\mathbf{x}_2$もこの微分も$\mathbf{x}_1$で表された．次に(3)式の上半分の両辺を時間微分し 2 次微分が含まれる式に(7)式を代入して$\mathbf{x}_2$を消去し，$\mathbf{x}_1$に関して整理する．

$$\begin{aligned} v_1\cdot\ddot{x}_1&=(q_{1,1}+v_2^{-1}\cdot q_{2,2}\cdot v_1)\cdot\dot{x}_1+(v_2^{-1}\cdot q_{1,2}\cdot q_{2,1}\\ &\quad-v_2^{-1}\cdot q_{2,2}\cdot q_{1,1})\cdot x_1-v_2^{-1}\cdot q_{2,2}\cdot q_{1,3}\cdot x_3\\ &\quad+q_{1,3}\cdot\dot{x}_3-v_2^{-1}\cdot q_{2,2}\cdot r_{1,1}\cdot g_1+r_{1,1}\cdot\dot{g}_1 \end{aligned} \quad (8)$$

次に(8)式を既知パラメータと可観測量だけで構成される項は左辺に移動して観測方程式とする．この際に元システムのパラメータが幾つか組み合わされて形成される状態値や入力値への係数は，それぞれまとめてd_iなる記号で表示する．

$$\begin{aligned} r_{1,1}\cdot\dot{g}_1&=v_1\cdot\ddot{x}_1-q_{1,1}+v_2^{-1}\cdot q_{2,2}\cdot v_1\cdot\dot{x}_1\\ &\quad-(v_2^{-1}\cdot q_{1,2}\cdot q_{2,1}-v_2^{-1}\cdot q_{2,2}\cdot q_{1,1})\cdot x_1\\ &\quad+v_2^{-1}\cdot q_{2,2}\cdot q_{1,3}\cdot x_3-q_{1,3}\cdot\dot{x}_3+v_2^{-1}\cdot q_{2,2}\cdot r_{1,1}\cdot g_1\\ &\cong d_1\cdot\ddot{x}_1+d_2\cdot\dot{x}_1+d_3\cdot x_1+d_4\cdot(-g_1) \end{aligned} \quad (9)$$



v1とv2のガス濃度はx1とx2，外気濃度はX3であり，r1,1は供給ガス流量g1からガス濃度流量への換算係数

図1　押入れを持つ居室の簡単な事例

ここに$q_{2,2}$は負であるがd_iは全て正になるように，(9)式右辺の第 4 項のガス供給流量g_1には負号を付けた．もしg_1がmg/sでガス濃度がmg/m^{3}で風量がm^3/sならば$r_{1,1}$は 1 で既知である．(9)に最小二乗法を適用してd_iが求められれば元パラメータは次式で計算される．

基本的アイデア

元の1階微分の高次システム(状態方程式モデル)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1,1} & \mathbf{M}_{1,2} \\ \mathbf{M}_{2,1} & \mathbf{M}_{2,2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1,1} & \mathbf{C}_{1,2} \\ \mathbf{C}_{2,1} & \mathbf{C}_{2,2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{O1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\cdot\mathbf{x}_O+\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\cdot\mathbf{g} \quad (1)$$

状態と入力値の高階微分を導入し，演繹的変形により次式の低次化2階微分システムを記述する

$$\mathbf{M}_{1,1}\cdot\ddot{\mathbf{x}}_1=\mathbf{D}_1\cdot\dot{\mathbf{x}}_1+\mathbf{D}_0\cdot\mathbf{x}_1 +\mathbf{E}_1\cdot\dot{\mathbf{x}}_O+\mathbf{F}_1\cdot\dot{\mathbf{g}}+\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{x}_O+\mathbf{F}_0\cdot\mathbf{g} \quad (2)$$

低次化システムの状態と入力値の観測により，低次化システムパラメータの同定を行い，同時に元の状態方程式モデルのシステムパラメータを求める

Development of Thermal Network Model System Identification Theory　Extension of System Parameter Estimation Theory for Original Higher Order State Equation from Observation of Lower Order and Higher Differentiation Equation System

OKUYAMA Hiroyasu

$$v_1 = d_1 \quad (10)$$

$$q_{1,3} = q_{3,1} = (d_4^{-1} r_{1,1}) d_3 \quad (11)$$

$$v_2 = -d_1 + (d_4^{-1} r_{1,1}) d_2 - (d_4^{-1} r_{1,1})(d_4^{-1} r_{1,1}) d_3 \quad (12)$$

$$q_{2,1} = q_{1,2} = -(d_4^{-1} r_{1,1}) d_1 + d_2 - (d_4^{-1} r_{1,1}) d_3 \quad (13)$$

ここで(9)の方程式誤差の期間積分を最小二乗の評価関数とする．この期間を⊿t で nt 区間に分割し(k-1)⊿t から k⊿t までの積分は次式で記述される．

$$r_{1,1}\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{g}_1 dt = d_1 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \ddot{x}_1 dt + d_2 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{x}_1 dt + d_3 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} x_1 dt + d_4 \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} (-g_1) dt \quad (14)$$

この(14)式の各項の積分は次式で定義し計算する．

$$\mathbf{y}_k = r_{1,1}\int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{g}_1 dt = r_{1,1}(g_1(k\Delta t) - g_1((k-1)\Delta t)) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} {}_1 z_k &= \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \ddot{x}_1 dt = \dot{x}_1(k\Delta t) - \dot{x}_1((k-1)\Delta t) \\ &\cong (x_1((k+1)\Delta t) - x_1((k-1)\Delta t) - x_1(k\Delta t) \\ &\qquad + x_1((k-2)\Delta t))/(2\Delta t) \end{aligned} \quad (16)$$

$${}_2 z_k = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \dot{x}_1 dt = x_1(k\Delta t) - x_1((k-1)\Delta t) \quad (17)$$

$${}_3 z_k \cong \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} x_1 dt = (x_1(k\Delta t) + x_1((k-1)\Delta t))\Delta t / 2 \quad (18)$$

$${}_4 z_k \cong \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} - g_1 dt = -(g_1(k\Delta t) + g_1((k-1)\Delta t))\Delta t / 2 \quad (19)$$

さらに低次化システムのパラメータd_iと${}_i z_k$によるベクトルとマトリックスを次の(20)，(21)式で定義する．

$$\mathbf{a} = {}^t(d_1, d_2, d_3, d_4) \quad (20), \quad \mathbf{Z}_k = \left[{}_1 z_k, {}_2 z_k, {}_3 z_k, {}_4 z_k\right]_k \quad (21)$$

この時，(9)式は(22)式で，方程式誤差$\mathbf{e}_k$は(23)式で，そして観測期間の誤差積分の二次形式評価関数は(24)式で表される．

この J を **a** で微分し **0** とおいて，低次化システムのパラメータが求められる．そして前述した様に(10)から(13)式で元システムのパラメータが求められる．

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a} \quad (22), \qquad \mathbf{e}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a} \quad (23)$$

$$J = \sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{nt} {}^t(\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{y}_k - \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) \quad (24)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \sum_{k=1}^{nt} (-{}^t\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{y}_k - {}^t\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{y}_k + 2 \cdot {}^t\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (25)$$

$$\mathbf{a} = (\sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{Z}_k)^{-1} \cdot (\sum_{k=1}^{nt} {}^t\mathbf{Z}_k \cdot \mathbf{y}_k) \quad (26)$$

4．計算機実験による検討

励振の与え方がまず問題になる．(9)式左辺から，ガス供給の時間微分が変化することが必要であるから，矩形波的なガス供給は適当ではない．そこで正弦波的な励振を幾つか試した．表 1 に示す単一周波数の励振と，二種の周波数の合成励振を試みた．模擬観測値生成のシミュレーションは 10 秒間隔で 24 時間分行い，後者の複数周波数の合成励振に関しては図 2 の様な濃度の応答を得た．一方システム同定のための⊿tは 30 秒をとり，期間は 12 時から 16 時までの 4 時間分のx_1とg_1に関する変化量を用いた．元システムパラメータの同定結果を，正解値とともに，短周波数励振の場合(a)と，複数周波数合成励振(a)+(b)の場合の二つを比較して表 2 に示す．(a)+(b)の場合が比較的良い結果を与えている．

5．理論の一般化の問題

本論での簡単な例題では，低次化システムと元システムの同定パラメータはスカラーで陽的な関係式を持つが，一般的問題ではマトリックスで陰伏的な関係となり，非線形方程式問題になる可能性がある．また本論では 2 階微分までを導入したが，元の n 次の状態方程式に等価で， 1 つの状態変数の n 階微分方程式一本に置き換えることも可能である．例えば室温変化の観測値から n 階微分値までを有意な精度で引き出すことができれば，室温だけの測定から n 次状態方程式モデルを同定することも可能なはずである．しかし実際上の諸々の測定誤差を考えれば有意な微分階数には限界があるだろう．さらに高階微分導入によって消去した状態変数は外界から直接的に入力を受けない前提を設けたが，必要十分の制約か検討を要する．

表1　ガス供給の二種の励振

ガス供給の励振=正弦波1+正弦波2（mg/sec）	
(a): 正弦波1	0.0085･sin(2π･k･⊿t/7200)+0.0085
(b): 正弦波2	0.0085･sin(2π･k･⊿t/18000)+0.0085

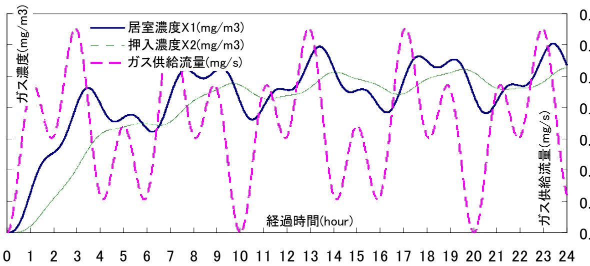


図2　ガス供給と濃度変化の模擬観測値

表2　システム同定結果の精度比較

	V_1 (liter)	V_2 (liter)	$q_{1,2}=q_{2,1}$ (liter/s)	$q_{1,3}=q_{3,1}$ (liter/s)
正解	25000	12500	2.084	3.472
(a)+(b)	24955	12443	2.162	3.477
(a)だけ	24617	7779	2.347	3.485

6．まとめ

高階微分の低次化システムから，元の状態方程式のパラメータを同定する基本的アイデアを示し，簡単な例題で検証した．さらに適切な励振や，理論の一般化の問題について検討した．

【謝辞】

同僚の大西由哲氏，NIC の益子智久氏の協力を得ました．

【参考文献】

[1]奥山博康「一般拡散システムの回路網による状態方程式とそのシステムパラメーターの同定理論」，日本建築学会論文報告集，Vol. 344，1984 年 10 月，pp103-115

[2]奥山博康「換気を含めた熱性能指標の推定」，日本建築学会環境工学委員会，熱環境小委員会伝熱 WG 熱性能評価 SWG，ｼﾝﾎﾟｼﾞｭｳﾑ，建物の熱性能とその評価，2003 年 3 月，pp33-40

＊1 清水建設 技術研究所 工博　　*1 Shimizu Corporation Institute of Technology Dr.Eng.