形態創生と構造最適化小委員会

Topology Optimization
1989 - 2007

2007.7.17

株式会社くいんと

Quint

連続体の位相最適化の原点

Martin P. Bendsoe and Noboru Kikuchi

Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method.

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 71(1988) 197-224.

Quint

2 Pioneers of the Topology Optimization
Prof. N. Kikuchi & Prof. M. P. Bendsoe
Oct. 30, 2006

Quint

Bendsoe & Kikuchi の位相最適化法

① 最大剛性を有する構造物の位相最適化問題を，構造物の平均コンプライアンス最小化問題とした.

② 設計領域を，特性関数を用いて記述し，対象構造物を含む充分大きな固定領域に拡張した.

③ 固定領域は小さい穴が無数に空いた多孔質領域と仮定した.

④ 多孔質体の材料定数を計算するために均質化法を適用した.
（特性関数を使って不連続領域を連続に）

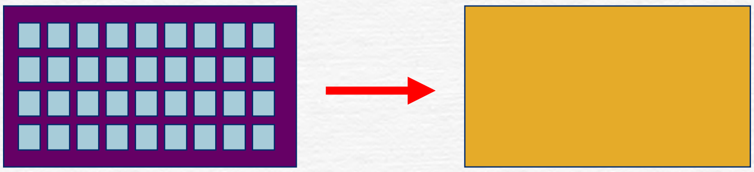
⑤ 均質化法で用いる微視構造（ユニットセル）の穴の大きさを制御して最適な材料分布を求め，結果として最大剛性を持つ位相形態を得た.

⑥ 最適化手法として，問題に適した最適化規準法を用いた.

Quint

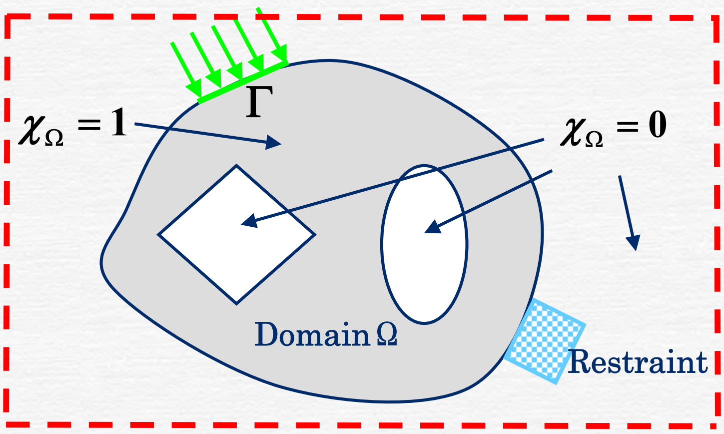
均質化法
The Homogenization Method

　対象となる構造のある領域が周期性を持つミクロ構造で構成される場合，周期の最小単位（Unit Cell）の構造形状とマクロ構造の大きさの関係から，ユニットセル近傍のマクロ的に平均化された材料定数を算出する方法.



周期構造　　　　等価な均質構造

特性関数で表現される緩和された領域



$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \qquad \int_\Omega \Phi\, dx = \int_F \chi_\Omega(x)\Phi\, dx$$

固定領域内で成り立つ仮想仕事の原理

$$\int_{\mathrm{F}} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u})^T \chi_\Omega \mathbf{D}\, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\, d\,\mathrm{F} = \int_\Gamma \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}\, d\,\Gamma$$

（簡単化するために物体力などは省略）

$\mathbf{u}$　：仮想変位ベクトル
ε　：仮想変位 $\mathbf{u}$ により生じる歪
$\mathbf{D}$　：応力ー歪関係マトリックス
t　：境界Γに働く分布力

最適化問題

連続体の全ポテンシャルエネルギーを仮想変位で最小化し，それを設計変数 で最大化する．

$$\underset{\mathbf{d}}{Max.}\left[\underset{\mathbf{u}}{Min.}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathrm{F}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \underline{\chi_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{d})} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\mathrm{F} - \int_\Gamma \mathbf{u}^T \mathbf{t}\, d\Gamma\right\}\right]$$

特性関数は微分可能ではない．

均質化法を適用し，上式を以下のように書き換える．

$$\underset{\mathbf{d}}{Max.}\left[\underset{\mathbf{u}}{Min.}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathrm{F}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \underline{\mathbf{D}^H(\mathbf{d})} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\mathrm{F} - \int_\Gamma \mathbf{u}^T \mathbf{t}\, d\Gamma\right\}\right]$$

$\chi_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{d}) \approx \mathbf{D}^H(\mathbf{d})$ ： 微分可能

最も基本的な構造最適化問題

（体積制約，ポテンシャルエナジー最大化）

$$\underset{\mathbf{d}}{Min.}\left\{-\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}(\mathbf{d})\mathbf{u}-\mathbf{u}^T\mathbf{f}\right)\right\} \quad s.t. \quad \int_{\mathrm{F}}\rho(\mathbf{d})d\mathrm{F}\le M_C$$

目的関数の設計変数に関する感度

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\,\mathbf{u}\right)}{\partial d_i}=\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial d_i}\right)^T\mathbf{K}\,\mathbf{u}+\mathbf{u}^T\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial d_i}\mathbf{u}+\mathbf{u}^T\mathbf{K}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial d_i}\right\}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial d_i}\mathbf{u}$$

Quint

菊池グループによる位相最適化の研究

1988 Bendsoe & Kikuchi 緩和領域の材料最適配置

1989 商用プログラム OPTISHAPE リリース（くいんと）

1991 Suzuki & Kikuchi 平面応力問題の剛性最大化

1992 Diaz & Kikuchi 最小固有値の最大化

1993 Ma, et.al. 周波数応答問題への適用

1995 Ma, et.al. 複数の固有値の最大化

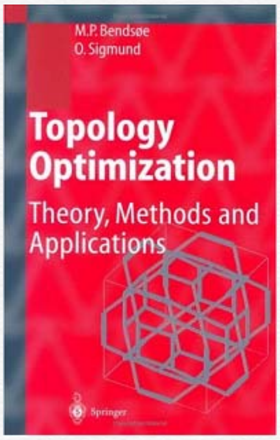
1998 Nishiwaki, et.al. コンプライアントメカニズムの創成

Quint

世界初の商用位相最適化ソフトウェア

Topology Optimization, Theory, Methods & Applications, M. P. Bendsoe and O. Sigmund, Springer.

という本の154ページに
 ‘Software for topology optimization’
という項目があり，以下の文章が載っている．



In 1989 a company in Japan, Quint Corp., released OPTISHAPE, a commercial software to perform topology optimization using the approach of Bendsoe & Kikuchi (1988).

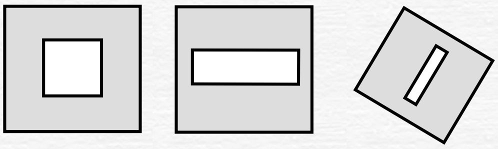
OPTISHAPEが参考にした論文

Suzuki, K. and Kikuchi, N.

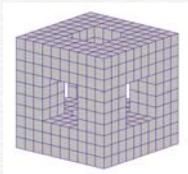
Shape and topology optimization using the homogenization method.

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 93(1991) 291-318.

ユニットセルの研究

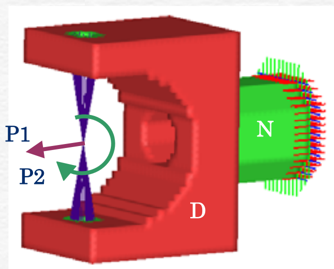


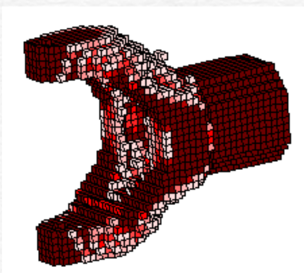
鈴木・菊池が提案したユニット・セル

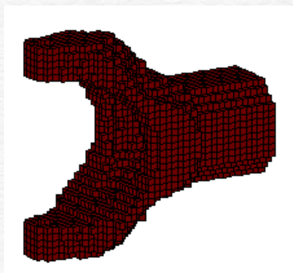


石井・青村・菊池が提案したフレームベースユニット・セル

石井惠三，他　フレームベース・ユニットセルを用いた位相最適化の研究
機論 67-654，C(2001)，pp. 499-506



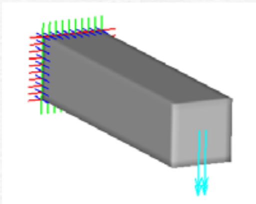




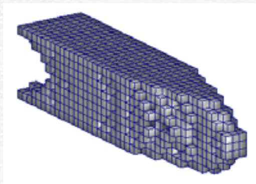
Suzuki-Kikuchi's Unit Cell　　**Frame Based Unit Cell**

金太郎飴構造

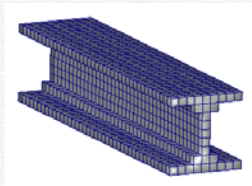
構造に3次元的な荷重が掛かり，境界条件も任意に設定されるにも拘わらず，製造上ある軸方向には同じ断面形態を要求されることがある。このようなケースに適用できる位相最適化を研究した。



片持ち梁



一般の位相最適化



金太郎飴位相最適化

石井惠三，ほか　等断面を有する構造物の位相最適化
機論 68-675，A(2002)，pp.1658-1665

松井・寺田の CAMD の概要

（Continuous Approximation of Material Distribution）

松井，寺田は，チェッカーボードなどの数値不安定現象を回避するため，設計変数を節点で定義し、領域内に連続性を与えた.

簡単化するために，設計変数を節点の材料密度と仮定して説明する.

$$\rho_e = \sum_{i=1}^{Nel} N_i \rho_i$$

ヤング率と材料密度を次の関係で仮定する.

$$E = \rho^m E_0$$

目的関数をポテンシャルエナジー，制約条件を体積とすれば，最適化式は次のように簡単に記述できる.

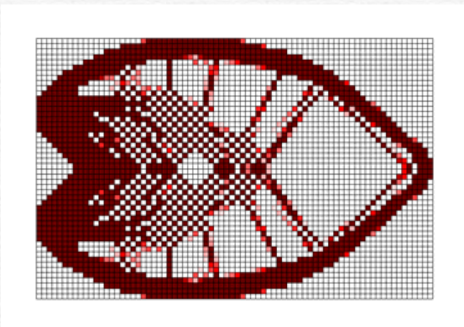
$$\underset{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{Min.}}\left(-\Phi\right),\quad \boldsymbol{s.t.}\ \boldsymbol{V} \le \boldsymbol{V}_0$$

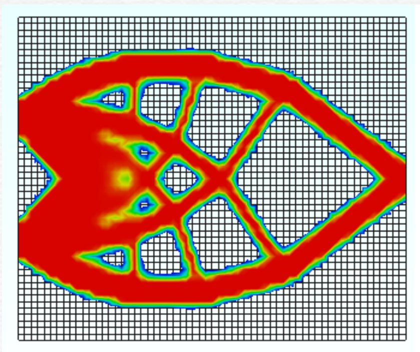
目的関数，制約関数の設計変数に関する感度は次のようになる.

$$\frac{\partial\left(-\Phi\right)}{\partial\rho_i} = -\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\rho_i}\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{u}\left(m\rho^{m-1}\mathbf{K}\right)\mathbf{u}\,\boldsymbol{N}_i$$

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\rho_i} = \boldsymbol{N}_i$$

従来手法とCAMDの結果の違い





位相最適化でどんなことができるか？

- 単一制約問題の最適化
  - 体積制約剛性最大化
  - 体積制約平均固有振動数最大化
- 複数制約問題の最適化
  - 平均固有振動数と体積を制約した剛性最大化
  - 剛性と体積を制約した平均固有振動数最大化
- 多目的問題の最適化
  - 体積を制約した剛性と平均固有振動数の最適化

Quint

単一制約問題の最適化

・体積制約ポテンシャルエナジー最大化

$$\Phi = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f} \quad ,$$

$$\boldsymbol{Minimize}\ (-\Phi)\ , \quad \boldsymbol{s.t.} \quad \int_\Omega \rho\, d\Omega \le V_C$$

・体積制約平均固有値最大化

$$\Lambda_{mean} = \left(\sum_{i=1}^{m} w_i \middle/ \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{\lambda_i} \right) ,$$

$$\boldsymbol{Minimize}\left(-\Lambda_{mean}\right) \quad , \quad \boldsymbol{s.t.} \quad \int_\Omega \rho\, d\Omega \le V_C$$

Quint

多制約問題の最適化

・体積と平均固有値を制約した剛性の最大化

$$\textit{Minimize}\ (-\Phi)$$
$$s.t.\quad V \le V_C\ \ \&\ \ \Lambda_{mean} \ge \Lambda_C$$

・体積と剛性を制約した平均固有値の最大化

$$\textit{Minimize}\ (-\Lambda_{mean})$$
$$s.t.\quad V \le V_C\ \ \&\ \ \Phi \ge \Phi_C$$

Quint

多目的問題の最適化

・体積を制約した剛性と固有振動数の最大化

$$\Pi_{new} = w\frac{\Phi}{\Phi_0} + (1-w)\frac{\Lambda_0}{\Lambda}$$

$$\textit{Minimize}\ \Pi_{new}\quad ,\quad s.t.\quad V \le V_C$$

w : *Weighting Factor*
Φ : *Mean Compliance*
Λ : *Mean Eigenvalue*

Quint

位相最適化の計算例

（1）ミケランジェロコード？

（2）エンジンマウントブラケットの設計

（3） X 線循環器診断装置 C アームの断面設計
（一様断面算出）

（4）材料設計

Quint

（1） ミケランジェロコード

Quint

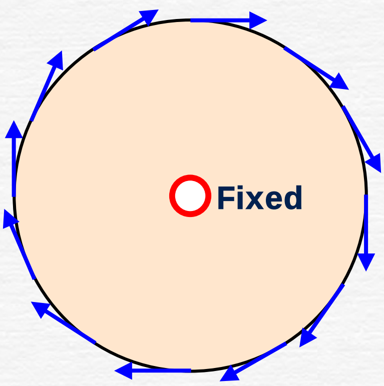
前ページの写真は，今から約500年前に，かの天才芸術家ミケランジェロがローマのカンピドリオ広場にデザインした模様で，いまだに謎を秘めた図形と言われています．

教育用位相最適化プログラムOPTISHAPE-ESでこの図形を再現しました．力学的条件を与えて最も剛性の高い位相形態がミケランジェロのデザインでした．

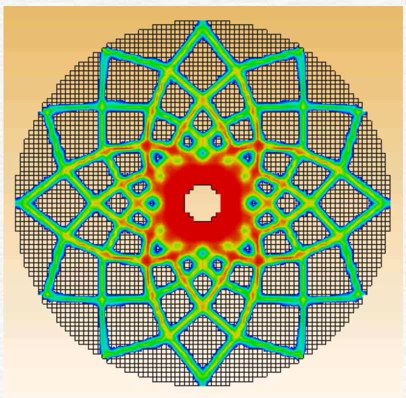
あのレオナルド・ダビンチも数々の絵にメッセージを残したと言われています．

この図形もそんな予感がしませんか？

Result of OPTISHAPE



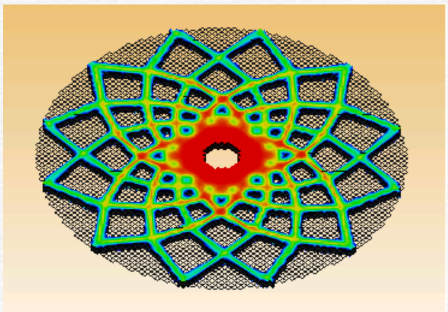
Model & Boundary Conditions



$V<0.3V_0$, Min.(u^Tf)

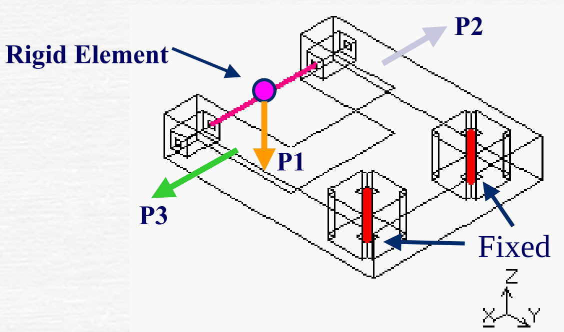
Is Topology Optimization an Art ?

Piazza del Compidoglio
Designed by Michelangelro



Result of OPTISHAPE

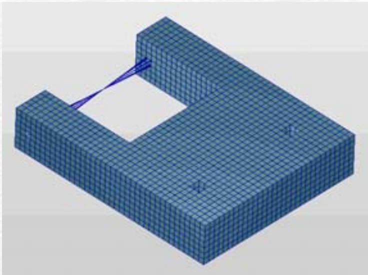
(2) エンジンマウントブラケットの設計
(多制約最適化)

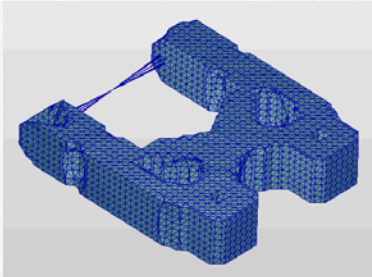


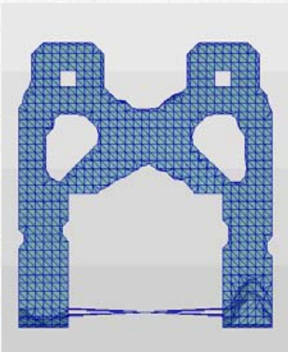
1) 目的関数 : 剛性最大化

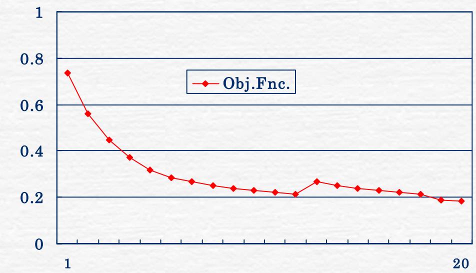
2) 制約条件 : $V \le 0.5V_0$ & $\Lambda_{(1+2+3)/3} \ge 2000\ Hz$

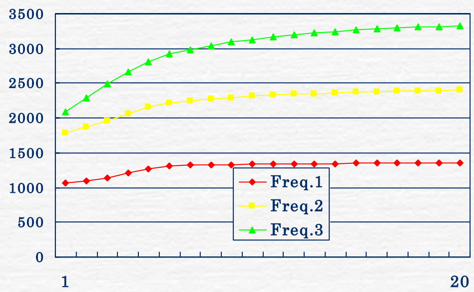
3) 荷重 : 自重, 前後衝突荷重











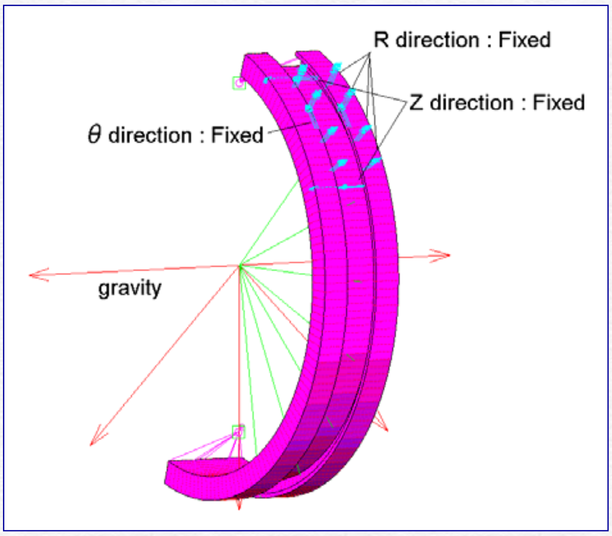
目的関数（上）と固有振動数（下）の履歴

（３）Ｘ線診断装置Cアームの断面設計

提供:株式会社東芝 様

Quint

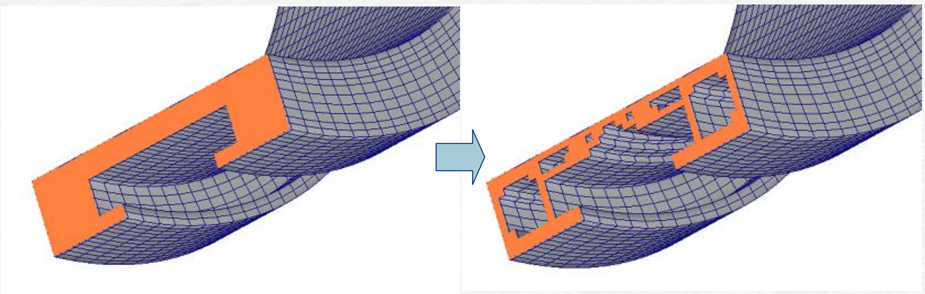
境界条件



Quint

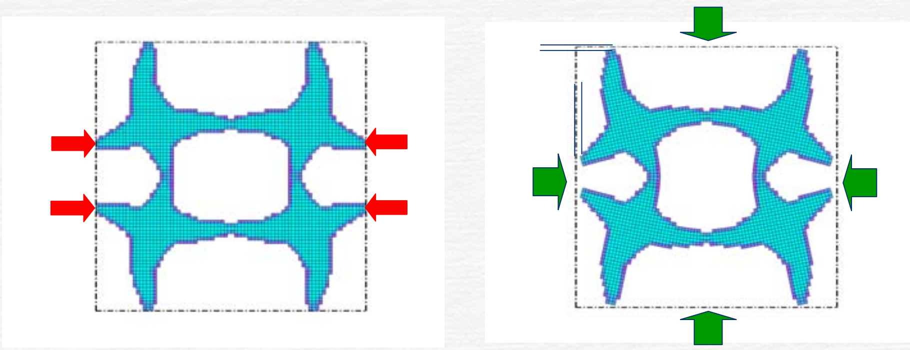
最適化の条件

①目的関数：剛性の最大化
②制約条件：$V \leq 0.5V_0$
C 型アームの軸方向は全て同一形状とする.
＊境界条件はアームの移動を模擬した拘束 7 ケース，荷重 5 ケースの組み合わせ.



（4）微視構造の設計

負のポアソン比（ν=－0.4）を持つ構造



ミシガン大学　菊池昇教授　提供

位相最適化の捉え方

従来のSimulation ⇒ 物理現象の検証

位相最適化は，その構造が持つ特徴を教えてくれる.

⇩

設計者の発想力を喚起する！

Quint

ありがとうございました

Quint